Mathematische Rechnungen

bei

Lebens- und Renten-Versicherungen.

2.

Die mathematischen Rechnungen

bei

Lebens- und Renten-Versicherungen

systematisch entwickelt

von

Dr. August Zillmer,

Mathematiker der Lebens-Versicherungs-Actien-Gesellschaft Germania zu Stettin.

Berlin.

Nicolaische Verlagsbuchhandlung.

(G. Parthey.)

1861.

Vorrede.

Hiermit übergebe ich dem mathematischen und dem für das Versicherungswesen sich interessirenden Publicum eine Darstellung der mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen in systematischer Entwickelung. Die Anregung zu diesem Werke gab der Umstand, dafs ich in keinem der Lehrbücher, in welchem die Anweisungen zur Berechnung der Prämien enthalten sind, eine ausführliche Darstellung fand, wie man die Reserve zu berechnen hat. Meistentheils fand ich nur kurze Notizen über die Reserve einer einfachen Lebens-Versicherung auf den Todesfall. Macht es nun auch dem Mathematiker von Fach keine grofse Schwierigkeit, die Formeln für die Reserve-Berechnung selber sich zu entwickeln, so glaube ich doch, einer nicht unnützen Arbeit mich unterzogen zu haben, indem ich in möglichster Vollständigkeit die Formeln für die Reserven der verschiedenen Versicherungsarten aufgestellt und es so auch dem Laien, der nur wenige Vorkenntnisse mitbringt, ermöglicht habe, mit solchen Rechnungen sich zu befassen.

Dafs ich dem Abschnitt über die Berechnung der Reserve auch einen Abschnitt über die Prämien-Berechnung vorausgeschickt habe, hat seinen Grund darin, dafs die in den andern Lehrbüchern angewandten Entwickelungs-Methoden mir nicht zusagten und dem eigentlichen Wesen dieser Rechnungen nicht zu entsprechen schienen. Sehr erfreulich war es daher für mich, in dem „Risiko bei Lebens-Versicherungen, entworfen von Dr. C. Bremiker, Berlin 1859“, welches erschien, als ich meine Arbeit schon ziemlich beendet hatte, dieselbe Ansicht ausgesprochen zu finden, und ich

erlaube mir, auf die eben erwähnte Schrift des Herrn Dr. C. Bremiker ganz besonders aufmerksam zu machen, indem einerseits in derselben (Seite 4 etc.) einleuchtend dargethan wird, dafs, sobald eine bestimmte Mortalitäts-Tabelle für die Rechnungen vorausgesetzt ist, es sich nicht mehr um Wahrscheinlichkeits-, sondern lediglich um Durchschnitts-Berechnungen handelt, andererseits aber in dieser Schrift zum ersten Male eine richtige, den Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung entsprechende Definition des Risiko's aufgestellt ist.

Abweichend von manchen anderen Autoren habe ich fast durchgehends die sogenannten pränumerando zahlbaren Renten bei den Formeln in Anwendung gebracht und zwar deshalb, weil diese der Natur der Sache nach häufiger vorkommen, indem jede terminliche Prämienzahlung einer solchen Rente entspricht, während postnumerando zahlbare Renten eigentlich nur bei Versicherungen von sofort beginnenden Renten ihre Anwendung finden. Indem ich so die der Sache am meisten entsprechende Form der Renten wählte, glaube ich auch einfachere Formeln gewonnen zu haben, wovon man durch Vergleichung sich leicht überzeugen kann.

Indem ich den Leser ersuche, die vorliegende Schrift mit Nachsicht aufzunehmen, versichere ich stets bereit zu sein, da, wo mir Mängel derselben nachgewiesen werden, dieselben anzuerkennen und in Zukunft zu vermeiden.

Stettin im November 1860.

A. Zillmer.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1. Die mathematischen Rechnungen bei Lebensversicherungen stützen sich im Wesentlichen einmal auf die Zinseszins-Rechnung, zweitens auf die Sterblichkeits-Tabelle.

§. 2. Die Zinseszins-Rechnung löst hier besonders die beiden Aufgaben:

1) Welchen Werth erlangt eine Summe S, wenn sie eine Anzahl n von Jahren zu π Procent (%) auf Zinseszins steht, bei jährlicher Zinszahlung?

2) Welchen Werth hat jetzt eine nach n Jahren fällige Summe Z, zu π % Zinseszins und jährlicher Zinszahlung gerechnet?

Da 100 Thlr. in einem Jahre bei unserer Annahme π Thlr. Zinsen bringen, so wird, da die π Thlr. Zinsen bei Zins auf Zins den 100 Thlr. am Ende des Jahres zugelegt werden, aus 100 Thlrn. nach einem Jahre $(100 + \pi)$ Thlr., mithin aus 1 Thlr. $\frac{100+\pi}{100}$ Thlr. und somit wird aus S in einem Jahre $S \cdot \frac{100+\pi}{100}$. Man hat also das Kapital mit $\frac{100+\pi}{100}$ zu multipliciren, um den zukünftigen Werth desselben nach einem Jahre zu finden. Bezeichnet man den zukünftigen Werth nach einem Jahre mit Z_1, ebenso den zukünftigen Werth nach zwei Jahren mit Z_2 etc., so ist

$$Z_1 = S \cdot \frac{100+\pi}{100}.$$

Offenbar ist für Z_1 der zukünftige Werth nach einem Jahre $Z_1 \cdot \frac{100+\pi}{100}$ nach der obigen Regel, und dies ist zugleich der zukünftige Werth nach 2 Jahren für die ursprüngliche Summe S, oder gleich Z_2; mithin ist

$$Z_2 = Z_1 \cdot \frac{100+\pi}{100} = S \cdot \frac{100+\pi}{100} \cdot \frac{100+\pi}{100} = S \cdot \left(\frac{100+\pi}{100}\right)^2.$$

Ebenso findet man

$$Z_3 = S \cdot \left(\frac{100+\pi}{100}\right)^3$$

etc. und allgemein

$$Z_n = S \cdot \left(\frac{100+\pi}{100}\right)^n.$$

Der Factor $\frac{100+\pi}{100}$ spielt hier eine grofse Rolle und zur Abkürzung bezeichnen wir ihn mit dem Buchstaben p und nennen ihn den Aufzinsungsfactor oder auch schlechtweg den Zinsfufs. Bei 3 %, d. h. wenn $\pi = 3$, ist $p = \frac{100+3}{100} = 1{,}03$; ist $\pi = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$, so ist $p = 1{,}035$ etc.

Die obigen Formeln verwandeln sich hierdurch in folgende:

$$Z_1 = S \cdot p$$
$$Z_2 = S \cdot p^2$$
$$Z_n = S \cdot p^n \qquad (1)$$

Ist $S = 1$, so ist

$$Z_n = p^n \qquad (1a)$$

Die zweite Aufgabe unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dafs Z_n bekannt ist, während S, der gegenwärtige Werth, gesucht wird. Man findet aus Formel (1), wenn man beide Seiten derselben mit p^n dividirt,

$$S = \frac{Z_n}{p^n} \qquad (2)$$

oder falls $Z_n = 1$ ist

$$S = \frac{1}{p^n} \qquad (2a)$$

Häufig wird $\frac{1}{p}$ mit einem besonderen Buchstaben bezeichnet, etwa mit d, und heifst dann Abzinsungs- oder Discontirungsfactor. Die Formeln (2) und (2a) gestalten sich dann

$$S = Z_n \cdot d^n$$
und $$S = d^n$$

§. 3. Die Sterblichkeits-Tabelle enthält für jedes Alter, in vollen Jahren ausgedrückt, eine Zahl der lebenden Personen. Die häufig in Anwendung kommende Tabelle der 17 englischen Gesellschaften hat z. B. für das Alter von 10 Jahren als Zahl der Lebenden 100000, für das Alter von 11 Jahren 99324, für das Alter von 12 Jahren 98650 etc., d. h. von 100000 zehnjährigen Personen leben nach einem Jahre noch 99324, gestorben sind also in dem einen Jahre 100000 — 99324 = 676; nach zwei Jahren leben noch 98650, und in diesem zweiten Jahre sind somit gestorben 99324 — 98650 = 674 etc.

Wir setzen bei unseren Entwickelungen keine specielle Mortalitätstafel voraus, sondern nehmen irgend eine als gegeben an und bezeichnen die Anzahl der Lebenden für das Alter von x Jahren mit l_x.

Anmerkung. Zur Ausführung von Berechnungen geben wir für solche, denen Mortalitätstafeln nicht zur Verfügung stehen, die Tabelle nach den Erfahrungen von 17 englischen Gesellschaften und die beiden Brune'schen für Männer und Frauen nach den Erfahrungen der preufsischen allgemeinen Wittwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1845.

Alter in Jahren	Anzahl der Lebenden		
	Tabelle der 17 englischen Gesellschaften	Brune's Tabelle für Männer	Brune's Tabelle für Frauen
10	100000	.	.
11	99324	.	.
12	98650	.	.
13	97978	.	.
14	97307	.	.
15	96636	.	.
16	95965	.	10000
17	95293	.	9838
18	94620	.	9682
19	93945	.	9533
20	93268	.	9392
21	92588	9260	9260
22	91905	9202	9136
23	91219	9144	9019
24	90529	9085	8908
25	89835	9025	8802
26	89137	8964	8700
27	88434	8903	8600
28	87726	8842	8501
29	87012	8780	8402
30	86292	8717	8304
31	85565	8653	8207
32	84831	8587	8110
33	84089	8518	8014
34	83339	8445	7918
35	82581	8369	7823
36	81814	8291	7729
37	81038	8210	7636
38	80253	8125	7543
39	79458	8036	7451
40	78653	7943	7361
41	77838	7847	7273
42	77012	7749	7187
43	76173	7649	7102
44	75316	7546	7018
45	74435	7440	6934
46	73526	7330	6849
47	72582	7216	6762
48	71601	7097	6674
49	70580	6973	6584
50	69517	6845	6492
51	68409	6714	6397
52	67253	6579	6299
53	66046	6440	6197
54	64785	6296	6090
55	63469	6147	5976
56	62094	5992	5853
57	60658	5830	5722
58	59161	5662	5583
59	57600	5487	5437
60	55973	5304	5286
61	54275	5112	5130
62	52505	4910	4969
63	50661	4699	4802
64	48744	4481	4627
65	46754	4258	4442
66	44693	4032	4246
67	42565	3804	4038
68	40374	3573	3819
69	38128	3338	3591
70	35837	3100	3356
71	33510	2859	3117
72	31159	2617	2877
73	28797	2374	2637
74	26439	2132	2398
75	24100	1895	2163
76	21797	1667	1935
77	19548	1457	1718
78	17369	1269	1516
79	15277	1103	1330
80	13290	954	1159
81	11424	817	1000
82	9694	689	849
83	8112	568	706
84	6685	454	575
85	5417	350	461
86	4306	261	366
87	3348	187	289
88	2537	127	228
89	1864	80	180
90	1319	46	141
91	892	24	108
92	570	11	80
93	339	4	57
94	184	1	38
95	89	0	24
96	37		14
97	13		7
98	4		3
99	1		1

Erster Theil.

Prämien - Berechnung.

Erster Abschnitt.

Renten-Versicherung für einzelne Leben.

§. 4. Nehmen wir an, so viel $x$jährige Personen, wie in der Sterblichkeits-Tabelle für das Alter von x Jahren verzeichnet sind, also l_x Personen, empfangen von jetzt ab, so lange sie leben, jeder eine Rente jährlich pränumerando zahlbar in dem jedesmaligen Betrage von 1, so fragt es sich, welches ist der gegenwärtige Werth einer solchen Rente für die einzelne Person (Leibrente).

Die sogleich zur Auszahlung kommende Summe ist, da von l_x Personen jede 1 empfängt, l_x. Nach einem Jahre leben von den l_x Rentenempfängern noch l_{x+1}; diese empfangen zusammen die Summe l_{x+1} und der gegenwärtige Werth dieser nach einem Jahre zahlbaren Summe ist nach Formel (2)

$$\frac{l_{x+1}}{p}.$$

Nach zwei Jahren leben noch l_{x+2} Personen, und diese erhalten die Summe l_{x+2}, deren gegenwärtiger Werth, da sie nach 2 Jahren zur Auszahlung kommt, ebenfalls nach Formel (2)

$$\frac{l_{x+2}}{p^2}$$

ist. Setzt man dies so fort bis zum höchsten Alter in der Sterblichkeits-Tabelle und summirt alle einzelnen Werthe, so hat man den Werth der Renten für sämmtliche l_x Personen, welche die Rentenzahlungen empfangen. Wird der Werth der einzelnen Rente bezeichnet durch R_x, so ist

$$l_x \,.\, R_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \frac{l_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots$$

oder, indem mit l_x auf beiden Seiten dividirt wird,

$$R_x = \frac{l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \frac{l_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots}{l_x} \qquad (3)$$

Anmerkung. Ist der jährliche Betrag der Rente nicht 1, sondern S, so ist der Werth dieser Rente offenbar $R_x \,.\, S$.

§. 5. Wollte man nach der vorstehenden Formel die Rentenwerthe für sämmtliche Alter berechnen, so würde man eine ungeheure Arbeit haben. Für das Alter von 35 Jahren ist z. B.

$$R_{35} = \frac{l_{35} + \frac{l_{36}}{p} + \frac{l_{37}}{p^2} + \cdots\cdots}{l_{35}}$$

und ähnlich

$$R_{36} = \frac{l_{36} + \frac{l_{37}}{p} + \frac{l_{38}}{p^2} + \cdots\cdots}{l_{36}}$$

Um R_{35} zu finden, müfste man jede Zahl der Lebenden durch eine andere Potenz von p dividiren, als in der Formel für R_{36} und ebenso müfste man für jede andere Rente wieder andere Divisionen machen. Dies vermeidet man durch folgende einfache Hülfsmittel:

1) Man dividire Zähler und Nenner der rechten Seite der Formel (3) mit p^x, so wird daraus

$$R_x = \frac{\frac{l_x}{p^x} + \frac{l_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{p^{x+2}} + \cdots\cdots}{\frac{l_x}{p^x}}$$

$\frac{l_x}{p^x}$, ebenso $\frac{l_{x+1}}{p_{x+1}}$ etc. bedeuten den Werth der Summe l_x, l_{x+1} etc. von x, resp. $x+1$ etc. Jahren, d. h. zur Zeit der Geburt. Wir wollen $\frac{l_y}{p^y}$ schlechtweg die discontirte Zahl der Lebenden vom Alter y nennen und mit λ_y bezeichnen, so dafs

$$\frac{l_y}{p^y} = \lambda y$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnungsweise ist

$$R_x = \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \cdots\cdots}{\lambda_x} \tag{4}$$

Nun braucht man die Zahl der Lebenden für ein bestimmtes Alter nur einmal zu dividiren, und kann die dadurch erhaltene discontirte Zahl bei allen Renten, bei denen dies Alter in Rechnung kommt, wieder anwenden. Bezeichnet man die Summe

$$\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \cdots\cdots,$$

welche Summe fortgesetzt zu denken ist bis zum höchsten Alter der Sterblichkeits-Tabelle, mit

$$\Sigma \lambda_x,$$

so ist

$$R_x = \frac{\Sigma \lambda_x}{\lambda_x} \tag{5}$$

2) Multiplicirt man Zähler und Nenner der rechten Seite von Formel (3) mit p_{z-x}, wo z das höchste Alter, das in der Sterblichkeits-Tabelle vorkommt, in Jahren ausgedrückt bedeutet, so wird

$$R_x = \frac{l_x \cdot p^{z-x} + l_{x+1} \cdot p^{z-(x+1)} + l_{x+2} \cdot p^{z-(x+2)}}{l_x \cdot p^{z-x}}$$

Nennen wir nun die Zahlen von der Form $l_y \,.\, p^{z-y}$ schlechtweg die aufgezinsten Zahlen der Lebenden und bezeichnen sie mit a_y, so ist

$$R_x = \frac{a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \ldots\ldots}{a_x} \tag{6}$$

und bei ähnlicher Bezeichnung wie oben

$$R_x = \frac{\Sigma a_x}{a_x} \tag{7}$$

Anmerkung. Die Berechnung der Renten macht man nach Formel (5) und (7) am Bequemsten auf folgende Art. Man construirt sich eine Tabelle, deren erste Columne das Alter in Jahren ausgedrückt enthält, die zweite Columne enthält die Zahlen der Lebenden, die dritte die Logarithmen der Lebenden, die vierte log p, multiplicirt mit der Anzahl der Jahre, die fünfte enthält dann die Differenzen zwischen den sich entsprechenden Zahlen der dritten und vierten Columne, die sechste die zugehörigen Numeri, d. h. die discontirten Zahlen der Lebenden, die siebente die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden vom höchsten Alter an bis zu dem betreffenden incl. Die folg. Columne enthält die Logarithmen dieser Summen.

Für die Sterblichkeits-Tabelle der 17 englischen Gesellschaften hat man also folgende Tabelle, wenn zu $3\frac{1}{2}$ % gerechnet wird.

1. Alter in Jahren	2. Zahlen der Lebenden	3. Logarithmen der Zahlen der Lebenden	4. log$p$ (=1.035) multiplicirt mit dem Alter	5. Logarithmen der discontirten Zahlen der Lebenden	6. Discontirte Zahlen der Lebenden	7. Summen der discontirten Zahlen der Lebenden von oben an	8. Logarithmen der Summen der discontirten Zahlen der Lebenden
y	l_y	log l_y	y . log p	log λ_y = log l_y - y . log p	λ_y	$\Sigma\lambda_y$	log $\Sigma\lambda_y$
99	1	0.	1.47909	0.52091—2	0.0332	0.0332	0.52091—2
98	4	0.60206	1.46415	0.13791—1	0.1374	0.1706	0.23198—1
97	13	1.11394	1.44921	0.66473—1	0.4621	0.6327	0.80113—1
96	37	1.56820	1.43427	0.13393	1.3612	1.9939	0.29968
95	89	1.94939	1.41933	0.53006	3.3889	5.3828	0.73000
94	184	2.26482	1.40439	0.86042	7.2514	12.634	1.10161
93	339	2.53020	1.38945	1.14075	13.828	26.462	1.42262
92	570	2.75587	1.37451	1.38136	24.064	50.526	1.70351
91	892	2.95036	1.35957	1.59079	38.976	89.502	1.95183
90	1319	3.12024	1.34463	1.77561	59.650	149.152	2.17362
etc.							

Die vorstehende Tabelle denke man sich fortgesetzt bis zum jüngsten Alter der Sterblichkeits-Tabelle.

Um den Werth der Rente z. B. einer neunzigjährigen Person zu finden, hat man die entsprechenden Zahlen aus Columne 7 und 6 durch einander zu dividiren, oder von dem Logarithmus aus Columne 8 den Logarithmus aus Columne 5 abzuziehen und zu dieser Differenz den Numerus aufzuschlagen.

Es ist also
$$\log R_{90} = 2.17362 - 1.77561$$
$$= 0.39801$$
mithin
$$R_{90} = 2.5004.$$

Will man mit den aufgezinsten Zahlen rechnen, so construirt man sich eine Tabelle, die sich von der vorigen dadurch unterscheidet, dafs die vierte Columne den log p multiplicirt mit $(99 - y)$ enthält, also wird diese Columne in der ersten Reihe führen 0, in der zweiten log p selber, weil hier multiplicirt wird mit $99 - 98 = 1$, in der dritten 2 . log p etc. Die fünfte Columne enthält dann die Summen der sich entsprechenden Zahlen aus der dritten und vierten Columne. Im Uebrigen verfährt man ebenso wie vorher. — Ist die Sterblichkeits-Tabelle für Männer und Frauen verschieden, so mufs man auch die Renten für Männer und Frauen verschieden berechnen.

§. 6. Kauft Jemand eine solche jährlich pränumerando zahlbare Rente, so würde er in demselben Augenblick, wo er den Werth der Rente oder die Mise einzahlt, die erste Rentenzahlung erhalten. In der Regel läſst man die erste Rentenzahlung wegfallen und zieht dafür den Werth dieser ersten Rentenzahlung von dem Werth der Rente ab, und nennt nun eine solche Rente eine postnumerando zahlbare Rente. Bezeichnet man sie mit r, so ist

$$r_x = R_x - 1 \tag{8}$$

oder

$$R_x = 1 + r_x \tag{8a}$$

§. 7. Findet die Auszahlung der Rente nicht am Anfange eines jeden Jahres statt, sondern am Anfange eines jeden halben Jahres, aber dafür in dem Betrage $\frac{1}{2}$, so ändert sich dadurch der Werth der Rente.

Die Sterblichkeits-Tabelle giebt nur die Lebenden am Anfange des Jahres. Nimmt man aber an, daſs das Sterben sich gleichmäſsig über das Jahr vertheile, so sterben im ersten halben Jahre ebenso viele wie im zweiten.

Im Alter von x Jahren leben l_x Personen,

„ „ „ $x+1$ „ „ l_{x+1} „ , mithin sterben in dem $(x+1)$sten Altersjahre $l_x - l_{x+1}$ und in jedem der beiden halben Jahre $\frac{l_x - l_{x+1}}{2}$. Es leben folglich beim Beginn des zweiten halben Jahres

$$l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{2} = \frac{2\,l_x - l_x + l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Betrachten wir nun zuerst wieder pränumerando zahlbare Renten, so beträgt die erste Zahlung bei l_x solcher Renten für $x$jährige Personen

$$\tfrac{1}{2}\,l_x$$

und die zweite $\frac{1}{2} \cdot \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$.

Da diese zweite Zahlung aber erst nach einem halben Jahre fällig ist, so muſs sie um ein halbes Jahr abgezinst werden. Die Zinsen für ein halbes Jahr kann man offenbar so berechnen, wie für ein ganzes Jahr, nur muſs man die halbe Anzahl der Procente in Rechnung bringen. Werden die jährlichen Zinsen zu π % gerechnet, so müssen die halbjährlichen Zinsen zu $\frac{\pi}{2}$ % gerechnet werden, und der Zinsfuſs ist $\frac{100 + \frac{\pi}{2}}{100} = \frac{200 + \pi}{200}$. Nun war $p = \frac{100 + \pi}{100}$, mithin ist

$$\frac{200 + \pi}{200} = \frac{100 + 100 + \pi}{200}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \frac{100 + \pi}{2 \cdot 100}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \frac{p}{2}$$

$$= \frac{1 + p}{2}$$

Mit diesem Ausdruck ist eine Summe zu dividiren, wenn man ihren Werth vor einem halben Jahre erhalten will bei π % jährlicher Zinsen. Der Werth der zweiten Zahlung ist somit

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \cdot \frac{2}{1+p} = \tfrac{1}{2} \frac{l_x + l_{x+1}}{1+p}$$

Die erste Zahlung im zweiten Jahre beträgt

$$\tfrac{1}{2} \cdot l_{x+1},$$

und die zweite

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{2}.$$

Um den jetzigen Werth dieser beiden Zahlungen zu finden, zinsen wir zuerst die zweite Zahlung um $\frac{1}{2}$ Jahr ab und dann die Summe der beiden Zahlungen um 1 Jahr. Dies giebt

$$\frac{1}{p}\left(\tfrac{1}{2} l_{x+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{1+p}\right)$$

Dem entsprechend findet man den jetzigen Werth der Zahlungen für das dritte Jahr.

$$\frac{1}{p^2}\left(\tfrac{1}{2} l_{x+2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{l_{x+2} + l_{x+3}}{1+p}\right)$$

etc. Bezeichnet $R^{\frac{2}{2}}$ den Werth der halbjährlich zahlbaren Rente, so ist

$$\begin{aligned}
R^{\frac{2}{2}} &= \frac{1}{2l_x}\left\{l_x + \frac{l_x + l_{x+1}}{1+p} + \frac{1}{p}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{1+p}\right) + \frac{1}{p^2}\left(l_{x+2} + \frac{l_{x+2} + l_{x+3}}{1+p}\right) + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{2l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \ldots\right) \\
&\quad + \frac{1}{1+p} \cdot \frac{1}{2l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \ldots\right) \\
&\quad + \frac{1}{1+p} \cdot \frac{1}{2l_x}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{p} + \frac{l_{x+3}}{p^2} + \ldots\right) \\
&= \frac{R_x}{2} + \frac{R_x}{2(1+p)} + \frac{1}{1+p} \cdot \frac{1}{2.l_x}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{p} + \frac{l_{x+3}}{p^2} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Multipliciren und dividiren wir das letzte Glied mit p, und zwar das letztere innerhalb der Klammer, und setzen wir innerhalb der Klammer dann noch $l_x - l_x$ hinzu, so wird das letzte Glied

$$\frac{p}{1+p} \cdot \frac{1}{2l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \ldots - l_x\right) = \frac{p}{1+p} \cdot \frac{R_x - 1}{2} = \frac{p}{1+p} \cdot \frac{R_x}{2} - \frac{p}{2(1+p)}$$

und

$$\begin{aligned}
R_x^{\frac{2}{2}} &= \frac{R_x}{2} + \frac{R_x}{2(1+p)} + \frac{p}{1+p}\frac{R_x}{2} - \frac{p}{2(1+p)} = R_x\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(1+p)}(1+p)\right\} - \frac{p}{2(1+p)} \\
&= R_x\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) - \frac{p}{2(1+p)} \text{ oder}
\end{aligned}$$

$$R_x^{\frac{2}{2}} = R_x - \frac{p}{2(1+p)} \tag{9}$$

d. h. um den Werth der halbjährlich pränumerando zahlbaren Rente zu finden, zieht man den Bruch $\frac{p}{2(1+p)}$ von der jährlich pränumerando zahlbaren Rente ab. Dieser Bruch $\frac{p}{2(1+p)}$ ist angenähert, indem man p (ebenfalls angenähert) $= 1$ setzt, $\frac{1}{4}$; und somit ist angenähert

$$R_x^{\frac{2}{2}} = R_x - \tfrac{1}{4} \tag{9a}$$

d. h. der Werth der halbjährlich pränumerando zahlbaren Rente ist um $\frac{1}{4}$, oder den vierten Theil des jährlichen Betrages kleiner, als der Werth der jährlich pränumerando zahlbaren Rente.

Anmerkung 1. Die halbjährlich postnumerando zahlbare Rente, bezeichnet durch $r^{\frac{2}{2}}$, ist offenbar um $\frac{1}{2}$ kleiner, als $R^{\frac{2}{2}}$, weil die erste Zahlung im Betrage von $\frac{1}{2}$ wegfällt, oder

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{2}{2}} &= R_x^{\frac{2}{2}} - \tfrac{1}{2}, \\ &= R_x - \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Da aber $R_x = r_x + 1$ ist, so ist

$$r_x^{\frac{2}{2}} = r_x + \tfrac{1}{4}. \tag{10}$$

Die halbjährlich postnumerando zahlbare Rente hat also einen um $\frac{1}{4}$ gröſseren Werth, als die postnumerando jährlich zahlbare Rente.

Anmerkung 2. Der Bruch $\frac{p}{2(1+p)}$ ist nur annähernd $= \frac{1}{4} = 0.25$, er ist genauer

$= 0.2536946$ bei $3\,\frac{0}{0}$
$= 0.2542997$ bei $3\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$
$= 0.2549020$ bei $4\,\frac{0}{0}$
$= 0.2555012$ bei $4\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$
$= 0.2560975$ bei $5\,\frac{0}{0}$.

§. 8. Der Werth einer vierteljährlich pränumerando mit dem jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{4}$ zahlbaren Leibrente werde bezeichnet durch $R^{\frac{4}{4}}$. Wir wollen wieder diesen Werth bestimmen, indem wir l_x $x$jährige Personen annehmen, die solche Renten beziehen. Die erste Zahlung beträgt $\frac{1}{4} l_x$, da l_x Personen dieselbe erhalten. Nach einem Vierteljahr sind von den im ersten Jahre sterbenden $l_x - l_{x+1}$ Personen unter der Voraussetzung gleichmäſsigen Absterbens $\frac{l_x - l_{x+1}}{4}$ gestorben, es leben also noch

$$l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{4} = \frac{4\,l_x - l_x + l_{x+1}}{4} = \frac{3\,l_x + l_{x+1}}{4}$$

und die Summe, welche gezahlt wird, beträgt $\frac{1}{4} \cdot \frac{3\,l_x + l_{x+1}}{4}$. Für diese Zahlung muſs der jetzige Werth gesucht werden. Wenn ein Kapital für das Jahr $\pi\,\frac{0}{0}$ Zinsen bringt, so bringt es für das Vierteljahr $\frac{\pi}{4}\,\frac{0}{0}$, und somit ist der Zinsfuſs für das Vierteljahr

$$\frac{100 + \frac{\pi}{4}}{100} = \frac{400 + \pi}{400} = \frac{300 + 100 + \pi}{400} = \tfrac{3}{4} + \frac{100 + \pi}{4.100} = \tfrac{3}{4} + \frac{p}{4} = \frac{3 + p}{4}.$$

Die nach einem Vierteljahre fällige Zahlung hat also jetzt den Werth

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{3l_x+l_{x+1}}{4}\cdot\frac{4}{3+p}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{3l_x+l_{x+1}}{3+p}.$$

Die Anzahl der nach einem halben Jahre noch lebenden Personen ist $\frac{l_x+l_{x+1}}{2}$ (siehe vorigen §.), die Zahlung beträgt somit $\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+l_{x+1}}{2}$ und der jetzige Werth derselben ist

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+l_{x+1}}{1+p}.$$

Nach drei Vierteljahren sind gestorben $\tfrac{3}{4}(l_x-l_{x+1})$ Personen, es leben mithin $l_x-\tfrac{3}{4}(l_x-l_{x+1})=\frac{4l_x-3l_x+3l_{x+1}}{4}=\frac{l_x+3l_{x+1}}{4}$, und die Summe, welche diese Personen erhalten, beträgt $\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+3l_{x+1}}{4}$.

Um den jetzigen Werth dieser Summe zu finden, mufs man noch mit dem Zinsfufs für drei Vierteljahre dividiren, d. h. wenn die jährlichen Zinsen zu $\pi\,\%$ gerechnet werden, mit $\frac{100+\frac{3\pi}{4}}{100}$, und dies ist gleich

$$\frac{400+3\pi}{400}=\frac{100+3(100+\pi)}{400}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cdot\frac{100+\pi}{100}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cdot p=\frac{1+3p}{4}.$$

Der jetzige Werth der nach drei Vierteljahren fälligen Summe ist somit

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+3l_{x+1}}{4}\cdot\frac{4}{1+3p}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+3l_{x+1}}{1+3p}.$$

Der Gesammtwerth der vier Zahlungen des ersten Jahres ist nun

$$\tfrac{1}{4}l_x+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{3l_x+l_{x+1}}{3+p}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+l_{x+1}}{1+p}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{l_x+3l_{x+1}}{1+3p}.$$

Die vier Zahlungen des zweiten Jahres werden zuerst auf den Anfang des zweiten Jahres abgezinst und geben

$$\tfrac{1}{4}\left(l_{x+1}+\frac{3l_{x+1}+l_{x+2}}{3+p}+\frac{l_{x+1}+l_{x+2}}{1+p}+\frac{l_{x+1}+3l_{x+2}}{1+3p}\right)$$

und diese Summe wird dann noch durch p dividirt, damit man den Werth derselben zu Anfang des ersten Jahres erhält. Aehnlich verfährt man mit den Zahlungen aller folgenden Jahre bis zum höchsten Alter und es ergiebt sich:

$$R_x^{\frac{4}{4}}=\frac{1}{4l_x}\left\{l_x+\frac{3l_x+l_{x+1}}{3+p}+\frac{l_x+l_{x+1}}{1+p}+\frac{l_x+3l_{x+1}}{1+3p}+\frac{1}{p}\left(l_{x+1}+\frac{3l_{x+1}+l_{x+2}}{3+p}+\frac{l_{x+1}+l_{x+2}}{1+p}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{l_{x+1}+3l_{x+2}}{1+3p}\right)+\frac{1}{p^2}\left(l_{x+2}+\frac{3l_{x+2}+l_{x+3}}{3+p}+\frac{l_{x+2}+l_{x+3}}{1+p}+\frac{l_{x+2}+3l_{x+3}}{1+3p}\right)+\ldots\right\}$$

Ordnet man den vorstehenden Ausdruck anders, so ergiebt sich der folgende:

$$R_x^{\frac{4}{4}} = \frac{1}{4l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \dots\dots\right) + \frac{1}{3+p}\cdot\frac{3}{4l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \dots\dots\right)$$
$$+ \frac{1}{3+p}\cdot\frac{1}{4l_x}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{p} + \frac{l_{x+3}}{p^2} + \dots\right) + \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{4l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \dots\dots\right)$$
$$+ \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{4l_x}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{p} + \frac{l_{x+3}}{p_2} + \dots\right) + \frac{1}{1+3p}\cdot\frac{1}{4l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \dots\dots\right)$$
$$+ \frac{1}{1+3p}\cdot\frac{3}{4l_x}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{p} + \frac{l_{x+3}}{p^2} + \dots\right)$$

Dividirt man in diesem Ausdruck das dritte, fünfte und siebente Glied der rechten Seite mit p innerhalb der Klammer und setzt dafür ausserhalb der Klammer den Factor p hinzu, und fügt ausserdem in denselben Gliedern innerhalb der Klammern $l_x - l_x$ hinzu, so entsteht:

$$R_x^{\frac{4}{4}} = \frac{R_x}{4} + \frac{3}{3+p}\cdot\frac{R_x}{4} + \frac{p}{3+p}\cdot\frac{R_x-1}{4} + \frac{1}{1+p}\cdot\frac{R_x}{4} + \frac{p}{1+p}\cdot\frac{R_x-1}{4} + \frac{1}{1+3p}\cdot\frac{R_x}{4}$$
$$+ \frac{3p}{1+3p}\cdot\frac{R_x-1}{4}$$
$$= \frac{R_x}{4}\left(1 + \frac{3}{3+p} + \frac{p}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{p}{1+p} + \frac{1}{1+3p} + \frac{3p}{1+3p}\right) - \frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{3}{1+3p}\right)$$
$$= \frac{R_x}{4}\left(1 + \frac{3+p}{3+p} + \frac{1+p}{1+p} + \frac{1+3p}{1+3p}\right) - \frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{3}{1+3p}\right)$$
$$= \frac{R_x}{4}(1+1+1+1) - \frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{3}{1+3p}\right), \text{ also}$$

$$R_x^{\frac{4}{4}} = R_x - \frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{3}{1+3p}\right) \tag{11}$$

Der Ausdruck $\frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{3}{1+3p}\right)$ ist annähernd $= \frac{3}{8}$ (welches Resultat man erhält, wenn $p = 1$ gesetzt wird), und somit ist annähernd

$$R_x^{\frac{4}{4}} = R_x - \tfrac{3}{8} \tag{11a}$$

Die vierteljährlich pränum. zahlbare Rente hat mithin einen um $\frac{3}{8}$ des jährlichen Betrages der Rente kleineren Werth als die jährlich pränum. zahlbare Rente.

Anmerkung 1. Die vierteljährlich postnumerando zahlbare Rente, bezeichnet durch $r^{\frac{4}{4}}$, ist um die erste Zahlung, also um $\frac{1}{4}$ kleiner als $R^{\frac{4}{4}}$, mithin

$$r^{\frac{4}{4}} = R^{\frac{4}{4}} - \tfrac{1}{4} = R_x - \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}$$
$$= R_x - \tfrac{5}{8}$$

Da aber $\quad R_x = r_x + 1$ ist

so ist $\quad r_x^{\frac{4}{4}} = r_x + 1 - \frac{5}{8}$, oder

$$r_x^{\frac{4}{4}} = r_x + \tfrac{3}{8} \tag{12}$$

Die vierteljährlich postnum. zahlbare Rente hat also einen um $\frac{3}{8}$ des jährlichen Betrages der Rente grösseren Werth als die jährlich postnum. zahlbare.

Anmerkung 2. Der Bruch

$$\frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p}+\frac{1}{1+p}+\frac{3}{1+3p}\right)$$

dessen Werth angenähert $\frac{3}{8}=0.375$ ist, ist genauer

$$\begin{aligned}
&= 0.3796184, \text{ wenn } \pi = 3\\
&= 0.3803750, \quad „ \quad \pi = 3.5\\
&= 0.3810278, \quad „ \quad \pi = 4\\
&= 0.3818769, \quad „ \quad \pi = 4.5\\
&= 0.3823282, \quad „ \quad \pi = 5.
\end{aligned}$$

§. 9. Bringt man den Ausdruck

$$\frac{p}{4}\left(\frac{1.}{3+1p}+\frac{1}{1+p}+\frac{3}{1+3p}\right)$$

indem man das zweite Glied innerhalb der Klammer im Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt, auf die Form

$$\frac{p}{4}\left(\frac{1}{3+p}+\frac{2}{2+2p}+\frac{3}{1+3p}\right)$$

so erscheint das Bildungsgesetz für denselben, und mit Hülfe desselben bildet man

$$R_x^{\frac{12}{12}} = R_x - \frac{p}{12}\left(\frac{1}{11+p}+\frac{2}{10+2p}+\frac{3}{9+3p}+\frac{4}{8+4p}+\frac{5}{7+5p}+\frac{6}{6+6p}+\frac{7}{5+7p}\right.$$
$$\left.+\frac{8}{4+8p}+\frac{9}{3+9p}+\frac{10}{2+10p}+\frac{11}{1+11p}\right),$$

oder annäherungsweise

$$R_x^{\frac{12}{12}} = R_x - \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{12}+\tfrac{2}{12}+\tfrac{3}{12}+\ldots\ldots\tfrac{11}{12}\right)$$
$$= R_x - \tfrac{11}{24} \tag{13}$$

Für den angenäherten Werth, d. h. wenn $p=1$ gesetzt ist, ergiebt sich ferner:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots\ldots\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= R_x - \frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2n}$$
$$= R_x - \frac{n-1}{2n} \tag{14}$$

Ist n unendlich grofs ($=\infty$), also der $n$te Theil des Jahres, der zwischen zwei auf einander folgenden Zahlungsterminen der Rente liegt, unendlich klein (wie dies in der Wirklichkeit bei der Natural-Verpflegung, bestehend in Gewährung von Wohnung, Kleidung und Nahrung stattfindet), so wird der Bruch $\frac{n-1}{2n}$, nachdem man ihn auf die Form $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ gebracht hat, $=\frac{1}{2}$, weil $\frac{1}{2n}=0$, und somit ist

$$R_x^{\frac{\infty}{\infty}} = R_x - \tfrac{1}{2}. \tag{15}$$

§. 10. **Aufgeschobene Leibrente.** Der Werth einer Leibrente für eine $x$jährige Person ist zu bestimmen, wenn die Rente, jährlich mit dem Betrage 1 zahl-

bar, erst nach y Jahren zu laufen beginnt, wenn alsdann die Person noch lebt, und so lange läuft, so lange diese Person lebt. — Nehmen wir soviel $x$jährige Personen, wie in der Sterblichkeits-Tafel für das Alter x verzeichnet sind, als solche Renten beziehend an, so wird nach y Jahren, da dann noch l_{x+y} Rentenbezieher am Leben sind, die Summe l_{x+y} fällig sein, deren jetziger Werth (y Jahre früher) $\frac{l_{x+y}}{p^y}$ ist. Ein Jahr später ist die Summe l_{x+y+1} fällig und diese um $(y+1)$ Jahre abgezinst giebt $\frac{l_{x+y+1}}{p^{y+1}}$. Der jetzige Werth der nach $(y+2)$ Jahren fälligen Summe ist $\frac{l_{x+y+2}}{p^{y+2}}$ etc. Die Summe aller dieser Werthe bildet den Werth aller dieser l_x Renten und die einzelne Rente, bezeichnet durch $\underset{y}{R}_x$, ist demnach

$$\underset{y}{R}_x = \frac{1}{l_x}\left\{\frac{l_{x+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots\right\}$$

Dividirt man in der vorstehenden Gleichung Zähler und Nenner der rechten Seite mit p_x, so ergiebt sich

$$\underset{y}{R}_x = \frac{1}{\frac{l_x}{p_x}}\left(\frac{l_{x+y}}{p^{x+y}} + \frac{l_{x+y+1}}{p^{x+y+1}} + \frac{l_{x+y+2}}{p^{x+y+2}} + \ldots\ldots\right)$$

und da hier die einzelnen Glieder des Zählers und der Nenner die discontirten Zahlen der Lebenden sind, so hat man

$$\underset{y}{R}_x = \frac{\lambda_{x+y} + \lambda_{x+y+1} + \lambda_{x+y+2} + \ldots\ldots}{\lambda_x}$$

oder

$$\underset{y}{R}_x = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_x}. \tag{16}$$

Der Werth der um y Jahre aufgeschobenen Leibrente wird also erhalten, indem man die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für das um y Jahre höhere Alter dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

Anmerkung 1. Da $R_{(x+y)} = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}$, so ist, wenn man in der Formel (16) Zähler und Nenner der rechten Seite mit λ_{x+y} multiplicirt

$$\underset{y}{R}_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}$$

$$\underset{y}{R}_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot R_{(x+y)} \tag{16a}$$

Hiernach findet man auch den Werth der um y Jahre aufgeschobenen Rente, indem man den Werth der Rente für das um y Jahre höhere Alter mit der discontirten Zahl der Lebenden dieses um y Jahre höheren Alters multiplicirt und dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

Anmerkung 2. Wird die aufgeschobene Rente nicht jährlich, sondern $\frac{1}{n}$ jährlich bezahlt in dem jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{n}$, so ist

$$\underset{y}{R}\overset{\frac{n}{n}}{_x} = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot R^{\frac{n}{n}}_{(x+y)} = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\left(R_{(x+y)} - \frac{n-1}{2n}\right) = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot R_{(x+y)} - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x},$$

oder

$$\underset{y}{R}\overset{\frac{n}{n}}{_x} = \underset{y}{R}_x - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda} \tag{17}$$

§. 11. Aufhörende oder temporäre Leibrente. Beginnt die Rente sofort und hört nach y Jahren auf (oder früher, falls der Rentenbezieher vor Ablauf dieser y Jahre stirbt), so ist die aufhörende Rente offenbar gleich der vollen Lebensrente vermindert um die nach y Jahren anfangende aufgeschobene Rente, d. h. wird die aufhörende Rente bezeichnet durch ${}^{y}R_x$, so ist

$$ {}^{y}R_x = R_x - \underset{y}{R}_x, \tag{18} $$

oder da

$$ R_y = \frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_y} $$

und

$$ \underset{y}{R}_x = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x} $$

ist

$$ {}^{y}R_x = \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \tag{18a} $$

Den Werth der nach y Jahren aufhörenden Rente findet man entweder, indem man von dem Werth der sofort beginnenden Rente den Werth der um y Jahre aufgeschobenen Rente abzieht — oder indem man von der Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für das gegenwärtige Alter die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für das um y Jahre höhere Alter abzieht und diese Differenz durch die discontirte Zahl der Lebenden des ursprünglichen Alters dividirt.

Anmerkung. Offenbar ist

$$ {}^{y}R_x^{\frac{n}{n}} = R_x^{\frac{n}{n}} - \underset{y}{R}_x^{\frac{n}{n}} $$

$$ = R_x - \frac{n-1}{2n} - \left\{\underset{y}{R}_x - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right\} $$

$$ = R_x - \underset{y}{R}_x - \frac{n-1}{2n} + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} $$

$$ = {}^{y}R_x - \frac{n-1}{2n}\left(1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right), \text{ oder} $$

$$ {}^{y}R_x^{\frac{n}{n}} = {}^{y}R_x - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_x - \lambda_{x+y}}{\lambda_x} \tag{19} $$

§. 12. Aufgeschobene aufhörende Leibrente. Beginnt die Rente nach y Jahren, falls der Rentenbezieher dann noch lebt, und endigt sie von jetzt ab gerechnet nach z Jahren (resp. beim Tode des Rentenempfängers, falls derselbe früher stirbt), so ist bei dem Früheren entsprechender Bezeichnung

$$ {}^{z}\underset{y}{R}_x = \underset{y}{R}_x - \underset{z}{R}_x \tag{20} $$

d. h. der Werth einer nach y Jahren beginnenden und nach z Jahren von jetzt ab gerechnet aufhörenden Rente ist gleich der Differenz der um y Jahre aufgeschobenen Rente und der um z Jahre aufgeschobenen Rente.

Ferner ist

$$ {}^{z}\underset{y}{R}_x^{\frac{n}{n}} = \underset{y}{R}_x^{\frac{n}{n}} - \underset{z}{R}_x^{\frac{n}{n}} $$

$$ = \underset{y}{R}_x - \frac{n-1}{n2} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - \underset{z}{R}_x + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+z}}{\lambda_x} $$

$$ = \underset{y}{R}_z - \underset{z}{R}_x - \frac{n-1}{2n}\left(\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - \frac{\lambda_{x+z}}{\lambda_x}\right) $$

oder

$$ {}^z_yR^n_x = {}^z_yR_x - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\lambda_{x+y} - \lambda_{x+z}}{\lambda_x}. \qquad (21)$$

§. 13. Soll der jetzige Werth der aufgeschobenen, oder der aufgeschobenen aufhörenden Rente nicht mit einem Male gezahlt werden, sondern in unter einander gleichen, jährlich pränumerando zahlbaren Summen, die während der Aufschubszeit entrichtet werden, so bildet diese Prämienzahlung eine aufhörende Rente, aber nicht mit dem jedesmaligen Betrage von 1, sondern von der Prämie. Bezeichnet man die Prämie durch $P({}_yR_x)$, (resp. durch $P({}^z_yR)$, so ist der Werth der Prämienzahlung

$$ {}^yR_x \,.\, P({}_yR_x) \text{ (resp. } = {}^yR_x \,.\, P({}^z_yR_x)) $$

Da der Werth der Prämienzahlung dem Rentenwerthe gleich sein muſs, so ist

$$ {}^yR_x \,.\, P({}_yR_x) = {}_yR_x , $$

oder

$$ P({}_yR_x) = \frac{{}_yR_x}{{}^yR_x}; \qquad (22)$$

ebenso findet man

$$ P({}^z_yR_x) = \frac{{}^z_yR_x}{{}^yR_x}. \qquad (23)$$

Die jährliche Prämie für die Versicherung einer um y Jahre aufgeschobenen Rente und ebenso die jährliche Prämie für die Versicherung einer um y Jahre aufgeschobenen und von jetzt ab nach z Jahren aufhörenden Rente findet man, indem man den entsprechenden Rentewerth dividirt durch den Werth der nach y Jahren aufhörenden Rente. Die Prämie ist natürlich nur während der ersten y Jahre zu leisten, eventuell nur bis zum Tode des Versicherten, falls derselbe innerhalb der Aufschubszeit stirbt.

In die obigen Formeln muſs man statt der Werthe der jährlich zahlbaren Renten die halbjährlich, vierteljährlich etc. zahlbaren Renten einsetzen, wenn dies erforderlich ist.

§. 14. Es sei mit der Versicherung einer aufgeschobenen Rente die Bedingung verbunden, daſs das für diese Versicherung eingezahlte Kapital, oder die bereits gezahlten jährlichen Prämien ohne Zinsen zurückgezahlt werden sollen, falls der Versicherte innerhalb der Aufschubszeit verstirbt, also zum Genuſs der Rente nicht gelangt. Es werde das einmal zu zahlende Kapital hier bezeichnet durch ${}_yRr_x$ und die jährliche Prämie durch $Pr\,({}_yR_x)$.

I. Im ersten Fall bei einmaliger Beitragszahlung zahlt die Versicherungsbank unter der Voraussetzung, daſs l_x $x$jährige Personen solche Versicherungen schlieſsen, am Ende des ersten Jahres so oft die Summe ${}_yRr_x$ zurück, so viel Personen von den l_x Versicherten in einem Jahre sterben, und die Anzahl der Sterbenden ist $l_x - l_{x+1}$. Diese Anzahl wollen wir bezeichnen durch t_{x+1}, und überhaupt allgemein bezeichnen

$$ l_v - l_{v+1} = t_{v+1} $$

und ferner sei

$$ \frac{t_{v+1}}{p^{v+1}} = \tau_{v+1}, \text{ oder } \frac{t_v}{p^v} = \tau_v $$

und diese Zahlen wollen wir nennen die discontirten Zahlen der Todten. Dem Früheren entsprechend werde ferner bezeichnet

$$\tau_{v+1} + \tau_{v+2} + \tau_{v+3} + \ldots\ldots = \Sigma \tau_{v+1},$$

wo die Summe linker Hand bis τ_{w+1} fortgesetzt zu denken ist, wenn w das höchste Alter der Sterblichkeits-Tabelle ist. — Die Bank hat also am Ende des ersten Jahres die Summe $t_{x+1} \,.\, \underset{y}{R} r_x$ zu zahlen, deren gegenwärtiger Werth $\frac{t_{x+1} \,.\, \underset{y}{R} r_x}{p}$ ist. Im zweiten Jahre sterben $l_{x+1} - l_{x+2} = t_{x+2}$, und für diese Sterbefälle zahlt die Bank eine Summe zurück, deren jetziger Werth $\frac{t_{x+2}}{p^2} \,.\, \underset{y}{R} r_x$, u. s. w. bis am Ende des $y$ten Jahres eine Summe fällig wird, deren jetziger Werth $\frac{t_{x+y}}{p^y} \,.\, \underset{y}{R} r_x$ ist. Die Leistungen der Bank, die nach dem $y$ten Jahre fällig werden, sind hier dieselben wie früher, so dafs man als Gesammtleistung der Bank hat

$$\underset{y}{R} r_x \left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y}\right) + \frac{l_{x+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1}}{p^{y+1}} + \ldots\ldots$$

Diese Summe ist dem Werth der Einzahlungen der Versicherten gleich und dieser ist $l_x \,.\, \underset{y}{R} r_x$, und durch Gleichstellung beider und gleichzeitige Division mit p^x erhält man

$$\frac{l^x}{p^x} \,.\, \underset{y}{R} r_x = \underset{y}{R} r_x \left(\frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{t_{x+2}}{p^{x+2}} + \ldots\ldots + \frac{t_{x+y}}{p^{x+y}}\right) + \frac{l_{x+y}}{p^{x+y}} + \frac{l_{x+y+1}}{p^{x+y+1}} + \ldots\ldots$$

oder, da überall die discontirten Zahlungen erscheinen

$$\lambda_x \,.\, \underset{y}{R} r_x = \underset{y}{R} r_x (\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots \tau_{x+y}) + \lambda_{x+y} + \lambda_{x+y+1} + \ldots\ldots$$

$$= \underset{y}{R} r_x [\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1}] + \Sigma \lambda_{x+y}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn das Glied mit $\underset{y\;x}{R}$ auf die linke Seite tritt,

$$\underset{y}{R} r_x [\lambda_x - (\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1})] = \Sigma \lambda_{x+y},$$

und somit

$$\underset{y}{R} r_x = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1})} \tag{24}$$

Dividirt man Zähler und Nenner der rechten Seite durch λ_x, so ergiebt sich

$$\underset{y}{R} r_x = \frac{\underset{y\;x}{R}}{1 - \frac{\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1}}{\lambda_x}} \tag{24a}$$

II. Bei jährlicher Prämienzahlung zahlt die Bank bei jedem Sterbefall des ersten Jahres die einfache Prämie, bei jedem Sterbefall des zweiten Jahres die doppelte Prämie, bei jedem Sterbefall des dritten Jahres die dreifache Prämie etc. zurück.

Hier gestaltet sich mithin die Gesammtleistung der Bank

$$Pr(\underset{y}{R})_x \left(\frac{t_{x+1}}{p} + 2 \,.\, \frac{t_{x+2}}{p^2} + 3 \,.\, \frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots y \,.\, \frac{t_{x+y}}{p^y}\right) + \frac{l_{x+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1}}{p_{y+1}} + \ldots\ldots$$

Vertheilt man diesen Werth auf alle l_x Versicherungen, so ist für die einzelne Versicherung der Werth der Bankleistung:

$$\frac{Pr\,(\underset{y}{R}_x)\cdot\left(\frac{t_{x+1}}{p}+2\,\frac{t_{x+2}}{p^2}+\ldots\ldots y\,\frac{t_{x+y}}{p^y}\right)+\frac{l_{x+y}}{p^y}+\frac{l_{x+y+1}}{p^{y+1}}+\ldots\ldots}{l_x}$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch p^x, so erhält der vorstehende Ausdruck die Form

$$\frac{Pr\,(\underset{y}{R}_x)\,(\tau_{x+1}+2\,\tau_{x+2}+\ldots\ldots y\,.\,\tau_{x+y})+\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

Bezeichnet man einstweilen

$$\tau_{x+1}+2\,\tau_{x+2}+3\,\tau_{x+3}+\ldots\ldots y\,.\,\tau_{x+y}=T^y_{x+1},$$

so wird der vorige Ausdruck verwandelt in

$$Pr(\underset{y}{R}_x)\,.\,\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}+\underset{y}{R}_x$$

Der Werth, durch diese Formel dargestellt, muſs der Einzahlung des Versicherten gleich sein. Die Prämienzahlung ist hier wie früher eine aufhörende Rente, nur mit dem jedesmaligen Betrage $Pr\,(\underset{y}{R}_x)$, also ist der Werth dieser Rente $Pr(\underset{y}{R})\,.\,R^y_x$ und somit erhält man die Gleichung:

$$Pr\,(\underset{y}{R}_x)\,.\,R^y_x=Pr\,(\underset{y}{R}_x)\,\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}+\underset{y}{R}_x,$$

oder

$$Pr\,(\underset{y}{R}_x)\left\{R^y_x-\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}\right\}=\underset{y}{R}_x,$$

woraus sich schlieſslich ergiebt

$$Pr(\underset{y}{R}_x)=\frac{\underset{y}{R}_x}{R^y_x-\dfrac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}} \tag{25}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit λ_x und berücksichtigt, daſs

$$R^y_x=\frac{\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

$$\text{und }\ \underset{y}{R}_x=\frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

ist, so hat man auch folgende Form für $Pr\,(\underset{y}{R}_x)$

$$Pr\,(\underset{y}{R}_x)=\frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x-\Sigma\lambda_{x+y}-T^y_{x+1}}\,. \tag{25a}$$

Anmerkung 1. Der Ausdruck T^y_{x+1} wird am Leichtesten auf folgende Weise berechnet. Man construire sich ähnlich wie die Tabelle für die discontirten Zahlen der Lebenden eine Tabelle für die discontirten Zahlen der Todten, bilde auch wie dort eine Columne, enthaltend die Summe der discontirten Zahlen der Todten vom höchsten Alter an (das letzte Alter ist hier um 1 Jahr höher als bei der Tabelle der Lebenden, dafür fehlt aber das Alter 0). Dann bilde man eine neue Columne, enthaltend die Summe aus den Summen der discontirten Zahlen der Todten vom höchsten Alter an. Ist z das höchste Alter für die Tabelle der Todten, so fängt die Tabelle so an, wenn wir mit dem höchsten Alter beginnen und nur die Columnen mitnehmen, die hier in Betracht kommen.

Alter	Discontirte Zahlen der Todten	Summen der Zahlen der vorigen Reihe von oben an	Summen der Zahlen der vorigen Reihe von oben an
z	τ_z	τ_z	τ_z
$z-1$	τ_{z-1}	$\tau_{z-1}+\tau_z$	$\tau_{z-1}+2\tau_z$
$z-2$	τ_{z-2}	$\tau_{z-2}+\tau_{z-1}+\tau_z$	$\tau_{z-2}+2\tau_{z-1}+3\tau_z$
$z-3$	τ_{z-3}	$\tau_{z-3}+\tau_{z-2}+\tau_{z-1}+\tau_z$	$\tau_{z-3}+2\tau_{z-2}+3\tau_{z-1}+4\tau_z$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Offenbar haben die Zahlen der letzten Columne die Form von unserem T^y_{x+1}, nur dafs T^y_{x+1} mit dem Gliede $y \,.\, \tau_{x+y}$ schliefst, während jene Zahlen immer die discontirten Zahlen der Todten bis zum höchsten Alter, jede mit dem entsprechenden Factor versehen, enthalten. Bezeichnen wir diese Zahlen durch T, so kann man T^y_{x+1} auf folgende Weise daraus bilden; offenbar ist

$$T^y_{x+1} = T_{x+1} - [(y+1)\,.\,\tau_{x+y+1} + (y+2)\,\tau_{x+y+2} + (y+3)\,\tau_{x+y+3} + \ldots\ldots]$$

Der Ausdruck in der Klammer läfst sich folgendermafsen zerlegen; es ist:

$$(y+1)\,\tau_{x+y+1} + (y+2)\,\tau_{x+y+2} + (y+3)\,\tau_{x+y+3} + \ldots\ldots$$
$$= y\,.\,\tau_{x+y+1} + \tau_{x+y+1} + y\,.\,\tau_{x+y+2} + 2\tau_{x+y+2} + y\,.\,\tau_{x+y+3} + 3\,\tau_{x+y+3} + \ldots\ldots$$
$$= y\,(\tau_{x+y+1} + \tau_{x+y+2} + \tau_{x+y+3} + \ldots\ldots) + \tau_{x+y+1} + 2\tau_{x+y+2} + 3\tau_{x+y+3} + \ldots\ldots$$
$$= y\,.\,\Sigma\tau_{x+y+1} + T_{x+y+1} \quad \text{und somit ist}$$

$$T^y_{x+1} = T_{x+1} - T_{x+y+1} - y\,.\,\Sigma\tau_{x+y+1} \tag{26}$$

in welcher Gestalt der Ausdruck T^y_{x+1} nicht allzu grofse Weitläuftigkeit beim Rechnen bietet, sobald die nöthigen Hülfstabellen construirt sind.

Hat man ferner ebenso die Summen aus den Summen der discontirten Zahlen der Lebenden construirt, und bezeichnet diese entsprechend, so dafs

$$L_x = \lambda_x + 2\lambda_{x+1} + 3\lambda_{x+2} + \ldots\ldots$$
$$= \Sigma\lambda_x + \Sigma\lambda_{x+1} + \Sigma\lambda_{x+2} + \ldots\ldots$$
$$\text{und } L^y_x = \lambda_x + 2\lambda_{x+1} + 3\lambda_{x+2} + \ldots\ldots y\,.\,\lambda_{x+y-1}$$

so ist auch hier

$$L^y_x = L_x - L_{x+y} - y\,.\,\Sigma\lambda_{x+y} \tag{27}$$

Nun ist $\Sigma\tau_{x+1} = \tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \tau_{x+3} + \ldots\ldots$

$$= \frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{t_{x+2}}{p^{x+2}} + \frac{t_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{l_x - l_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{p^{x+2}} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{l_x}{p^{x+1}} + \frac{l_{x+1}}{p^{x+2}} + \frac{l_{x+2}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots - \left(\frac{l_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{p^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots\right)$$
$$= \frac{1}{p}(\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2}) - (\lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \lambda_{x+3} + \ldots\ldots)$$
$$= \frac{1}{p}\,\Sigma\lambda_x - (\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \lambda_{x+3} + \ldots\ldots - \lambda_x)$$
$$= \frac{1}{p}\,\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_x + \lambda_x = \lambda_x - \Sigma\lambda_x\left(1 - \frac{1}{p}\right), \text{ und}$$

$$\Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x - \frac{p-1}{p}\,\Sigma\lambda_x, \text{ und folglich } \Sigma\tau_{x+y+1} = \lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}\,\Sigma\lambda_{x+y} \tag{28}$$

Ferner ist
$$T_{x+1} = \tau_{x+1} + 2\tau_{x+2} + 3\tau_{x+3} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{l_x - l_{x+1}}{p^{x+1}} + 2\,\frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{p^{x+2}} + 3\,\frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{l_x}{p^{x+1}} + 2\,\frac{l_{x+1}}{p^{x+2}} + 3\,\frac{l_{x+2}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots$$
$$- \left\{ \frac{l_{x+1}}{p^{x+1}} + 2\,\frac{l_{x+2}}{p^{x+2}} + 3\,\frac{l_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots \right\}$$
$$= \frac{\lambda_x + 2\lambda_{x+1} + 3\lambda_{x+2} + \ldots\ldots}{p} - (\lambda_{x+1} + 2\lambda_{x+2} + 3\lambda_{x+3} + \ldots\ldots)$$
$$= \frac{L_x}{p} - L_{x+1}$$

Ferner ist offenbar
$$L_x = L_{x+1} + \Sigma\lambda_x\text{, also}$$
$$T_{x+1} = \frac{L_x}{p} - L_x + \Sigma\lambda_x\text{, oder}$$
$$T_{x+1} = \Sigma\lambda_x - \frac{p-1}{p}\,L_x \tag{29}$$

Hieraus folgt, dafs
$$T^y_{x+1} = \Sigma\lambda_x - \frac{p-1}{p}\,L_x - \Sigma\lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p}\,L_{x+y} - y\,\left(\lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}\,\Sigma\lambda_{x+y}\right)$$
$$= \Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - y\lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}\,(L_x - L_{x+y} - y\,\Sigma\lambda_{x+y})$$

oder
$$T^y_{x+1} = \Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - y\,\lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}\,L^y_x \tag{30}$$

Mit Anwendung dieser Formel wird (25a)
$$Pr\,(\overset{R}{y})_x = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{y\,.\,\lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p}\,L^y_x} \tag{31}$$

Anmerkung 2. $\frac{L_x}{\lambda_x}$ stellt den Werth einer Rente dar mit wachsendem Betrage und zwar so, dafs beim Beginn des 1sten Jahres 1, beim Beginn des 2ten Jahres 2, beim Beginn des 3ten Jahres 3 etc. gezahlt wird.

Zweiter Abschnitt.

Kapital-Versicherung für einzelne Leben.

A. Kapital-Versicherung auf den Todesfall.

§. 15. Versicherung auf Lebenszeit. Die Summe C_x soll bestimmt werden, welche eine $x$jährige Person zu zahlen hat, damit bei ihrem Tode für sie die Summe 1 gezahlt werden kann.

Nimmt man an, dafs l_x $x$jährige Personen solche Versicherungen schliefsen, so sind davon nach einem Jahre gestorben
$$l_x - l_{x+1} = t_{x+1}$$

und somit ist (unter der Voraussetzung, dafs der Tod am Ende des Jahres erfolge) nach einem Jahre die Summe $t_{x+1} . 1$ fällig, deren jetziger Werth $\frac{t_{x+1}}{p}$ ist. Im zweiten Jahre sterben

$$l_{x+1} - l_{x+2} = t_{x+2}$$

am Ende des zweiten Jahres ist somit zu zahlen t_{x+2} und der jetzige Werth dieser Summe ist $\frac{t_{x+2}}{p^2}$, etc. Die Summe aller dieser Werthe

$$\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots$$

ist die Leistung der Versicherungsbank für alle l_x Versicherte, mithin für den einzelnen

$$\frac{1}{l_x}\left\{\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots\right\}$$

oder indem man Zähler und Nenner mit p_x dividirt

$$= \frac{\frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{t_{x+2}}{p^{x+2}} + \frac{t_{x+3}}{p^{x+3}} + \ldots\ldots}{\frac{l_x}{p^x}}$$

$$= \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \tau_{x+3} + \ldots\ldots}{\lambda_x}$$

$$= \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x}$$

Dies ist die Leistung der Bank für jeden einzelnen Versicherten, dieselbe mufs der Leistung des Versicherten gleich sein, d. h. es ist

$$C_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} \tag{32}$$

Die einmalige Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar nach dem Tode der Versicherten, findet man, indem man die Summe der discontirten Zahlen der Todten des um 1 Jahr höheren Alters dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

Anmerkung 1. Will man zur Berechnung der Kapitalzahlung für die Lebensversicherung nicht die discontirten Zahlen der Todten, sondern die discontirten Zahlen der Lebenden anwenden, so erhält man für sämmtliche l_x Versicherungen als jetzigen Werth der nach einem Jahre fälligen Zahlung $\frac{l_x - l_{x+1}}{p}$, ferner als jetzigen Werth der nach zwei Jahren fälligen Zahlung $\frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{p^2}$ etc.

Summirt man alle diese Werthe und dividirt wie vorhin mit l_x, so ist

$$C_x = \frac{1}{l_x}\left\{\frac{l_x - l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{l_x}\left\{\frac{l_x}{p} + \frac{l_{x+1}}{p^2} + \frac{l_{x+2}}{p^3} + \ldots\ldots\right\} - \frac{1}{l_x}\left\{\frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \frac{l_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots\right\}$$

Oder, wenn man mit p^x dividirt und multiplicirt:

$$C_x = \frac{1}{\lambda_x}\left\{\frac{\lambda_x}{p} + \frac{\lambda_{x+1}}{p} + \frac{\lambda_{x+2}}{p} + \ldots\ldots\right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda_x}\left\{\lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \lambda_{x+3} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{p\,.\,\lambda_x}\,.\,\Sigma\lambda_x - \frac{1}{\lambda_x}\left\{-\lambda_x + \lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_x}{p\lambda_x} + 1 - \frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \text{ also}$$

$$C_x = 1 - \frac{p-1}{p}\,.\,\frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x} \tag{32 a}$$

oder da

$$\frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x} = R_x$$

$$C_x = 1 - \frac{p-1}{p}\,.\,R_x \tag{32 b}$$

Nach dieser Formel findet man die einmalige Prämie für die in Rede stehende Versicherung, indem man den Werth der Leibrente multiplicirt mit dem Bruche $\frac{p-1}{p}$ (welcher Bruch $= \frac{0.03}{1.03}$, wenn man zu $3\,\frac{0}{0}$ rechnet, dagegen $= \frac{0.035}{1.035}$ ist, wenn man zu $3\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ rechnet, etc.) und dies Product von 1 abzieht.

Anmerkung 2. In der Formel (32 b) ist der Werth der pränumerando zahlbaren Rente angewandt worden; häufig findet man aber auch C_x durch die postnumerando zahlbare Rente ausgedrückt. Setzt man in die Formel (32 b) $r_x + 1$ anstatt R_x, so ergiebt sich die Formel für postnumerando zahlbare Renten. Es ist dann

$$C_x = 1 - \frac{p-1}{p}(r_x + 1) = \frac{p - (p-1)\,r_x - p + 1}{p}, \text{ d. h.}$$

$$C_x = \frac{1 - (p-1)\,r_x}{p}. \tag{32 c}$$

Anmerkung 3. Durch Vergleichung der beiden Formeln (32) und (32 a) ergiebt sich

$$\frac{\Sigma\tau_{x+1}}{\lambda_x} = 1 - \frac{p-1}{p}\,\frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x}$$

oder, indem man mit λ_x multiplicirt,

$$\Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x - \frac{p-1}{p}\,\Sigma\lambda_x, \tag{28}$$

welche Formel schon oben gefunden ist.

Ferner

$$\Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x\left(1 - \frac{p-1}{p}\,\frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x}\right)$$

d. h. (28 a)

$$\Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x\left(1 - \frac{p-1}{p}\,R_x\right).$$

Ferner findet man

$$\frac{p-1}{p}\,\Sigma\lambda_x = \lambda_x - \Sigma\,\tau_{x+1}, \text{ also}$$

$$\Sigma\lambda_x = \frac{p}{p-1}\left\{\lambda_x - \Sigma\tau_{x+1}\right\} \tag{33}$$

und

$$R_x = \frac{p}{p-1}\left\{1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1}}{\lambda_x}\right\} = \frac{p}{p-1}\left\{1 - C_x\right\} \tag{34}$$

Anmerkung 4. Bei der Aufstellung der Formel $C_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x}$ ist vorausgesetzt, dafs der Tod der Versicherten am Ende der Jahre erfolge. In Wirklichkeit ist aber das Sterben über das Jahr mehr oder weniger gleichmäfsig vertheilt, und man erhält einen genaueren Werth von C_x, wenn man voraussetzt, dafs die Versicherten in der Mitte der Jahre sterben. Unter dieser Voraussetzung hat man, wenn man für das Todesjahr einfache Zinsen berechnet, und den genaueren Werth mit X bezeichnet

$$X = \frac{\frac{t_{x+1}}{\frac{1+p}{2}} + \frac{t_{x+2}}{p \cdot \frac{1+p}{2}} + \frac{t_{x+3}}{p \cdot \frac{1+p}{2}} + \dots\dots}{l_x}$$

$$= \frac{2}{1+p} \cdot \frac{t_{x+1} + \frac{t_{x+2}}{p} + \frac{t_{x+3}}{p^2} + \dots\dots}{l_x}$$

$$= \frac{2p}{1+p} \cdot \frac{\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \dots\dots}{l_x}$$

$$= \frac{2p}{1+p} \cdot \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \tau_{x+3} + \dots\dots}{\lambda_x}$$

$$X = \frac{2p}{1+p} \cdot \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} = \frac{2p}{1+p} \cdot C_x \qquad (35)$$

Nun ist bei $p = 1.03$ $\frac{2p}{1+p} = \frac{2.06}{2.03} = 1.0148$,

für $p = 1.04$ ist $\frac{2p}{1+p} = 1.0196$,

für $p = 1.05$ ist $\frac{2p}{1+p} = 1.0243$.

Der Aufschlag, der zu der einmaligen und jährlichen Prämie genommen werden müfste, wenn die Auszahlung der Summe unmittelbar nach dem Todesfall stattfinden sollte, ist also sehr gering, bei $p = 1.03$ kaum $1\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$, bei $p = 1{,}04$ noch nicht ganz $2\,\frac{0}{0}$ der Prämie. Gewöhnlich zahlen die Versicherungsbanken aber erst 3 Monate nachdem die Todespapiere in Ordnung sind; wenn dies in Rechnung gebracht wird, so ist der Aufschlag sehr unbedeutend und kann, wie dies auch gewöhnlich geschieht, vernachlässigt werden.

Anmerkung 5. Ist die Versicherungssumme nicht 1, sondern S, so ist die einmalige Prämie $S \, . \, C_x$. In dem Folgenden sind die Prämien immer für die Versicherungssumme 1 berechnet worden, so dafs man also unsere Prämien mit der Versicherungssumme multipliciren mufs, wenn diese nicht gleich 1 ist.

§. 16. Der Werth der Lebensversicherung soll nicht mit einem Male beim Beginn der Versicherung gezahlt werden, sondern in jährlichen, sich gleich bleibenden Raten. Wird die jährlich zu zahlende Summe oder Prämie für eine beim Beginn der Versicherung $x$jährige Person mit P_x bezeichnet, so zahlen die sämmtlichen l_x Versicherten beim Beginn der Versicherung $l_x \, . \, P_x$; nach einem Jahre leben nur noch l_{x+1}, diese zahlen also auch nur $l_{x+1} \, . \, P_x$, und der jetzige Werth dieser Summe ist $\frac{l_{x+1}}{p} \, . \, P_x$, der jetzige Werth der Prämienzahlung nach 2 Jahren ist $\frac{l_{x+2}}{p^2} \, . \, P_x$ etc. Wird die Summe aller dieser Werthe bis zum höchsten Alter der Sterblichkeits-Tabelle durch l_x dividirt, so findet man den Werth der Prämienzahlung für den einzelnen und zwar:

$$\frac{P_x}{l_x} \left\{ l_x + \frac{l_{x+1}}{p} + \frac{l_{x+2}}{p^2} + \dots\dots \right\}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch p^x, so erscheinen überall die discontirten Zahlen und man hat

$$P_x . \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \dots\dots}{\lambda_x} = P_x . \frac{\Sigma \lambda_x}{\lambda_x}$$

oder

$$= P_x . R_x$$

Der Werth der Bankleistung für jeden einzelnen Versicherten bleibt hier derselbe, wie im vorigen Paragraphen, und somit ist, da der Werth der Prämienzahlung dem Werth der Bankleistung gleich sein muſs:

$$P_x . R_x = C_x,$$

oder

$$P_x = \frac{C_x}{R_x}$$

Die jährliche Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar beim Tode des Versicherten, findet man nach der vorstehenden Formel, indem man die einmalige Prämie durch den Werth der Leibrente dividirt.

Anmerkung. Multiplicirt man Zähler und Nenner der vorstehenden Formel mit λ_x, so erhält man, wie leicht erhellt

$$P_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\Sigma \lambda_x} \tag{36a}$$

oder

$$P_x = \frac{\lambda_x - \frac{p-1}{p} \Sigma \lambda_x}{\Sigma \lambda_x} \tag{36b}$$

Schreibt man ferner in Formel (36) den durch die Rente ausgedrückten Werth von C_x, so ist

$$P_x = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_x,}{R_x} \tag{36c}$$

oder

$$P_x = \frac{1}{R_x} - \frac{p-1}{p} \tag{36d}$$

d. h. die jährliche Prämie für die in Rede stehende Versicherung ist auch gleich dem umgekehrten Werth von dem Werthe der Leibrente, vermindert um den Bruch $\frac{p-1}{p}$.

Für postn. zahlbare Renten wird $P_x = \frac{C_x}{1 + r_x}$ (36e)

§. 17. Soll die jährliche Prämienzahlung nur bis zu einem bestimmten Alter des Versicherten, resp. bis zum Tode desselben, falls er vor Erreichung jenes Alters stirbt, fortgesetzt werden; oder, was dasselbe ist, soll die jährliche Prämie nur eine bestimmte Reihe von Jahren gezahlt werden, wobei ebenfalls bei früherem Tode des Versicherten das Ende der Prämienzahlung mit dem Tode eintritt, — so ändert sich die Bankleistung nicht, wohl aber die Prämienzahlung. Wird die Prämie bezeichnet durch P_x^y, wo y anzeigt, wie oft die Prämie gezahlt wird ($x + y$ bezeichnet das Alter, indem der Versicherte nicht mehr zahlt, er zahlt zum letzten Mal, wenn er $(x + y - 1)$ Jahre alt ist), so erhält man als Werth der Prämienzahlung für den einzelnen Versicherten

$$P_x^y . R_x^y,$$

denn die Prämienzahlung bildet hier eine nach y Jahren aufhörende Leibrente in dem jedesmaligen Betrage von P_x^y, und somit ist

$$P_x^y \,.\, R_x^y = C_x$$

oder

$$P_x = \frac{C_x}{R_x^y} \tag{37}$$

Die y Jahre hindurch, resp. nur bis zum Tode des Versicherten, falls derselbe vor Ablauf dieser y Jahre stirbt, zahlbare jährliche Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar nach dem Tode des Versicherten, erhält man, indem man die einmalige Prämie für diese Versicherung dividirt durch den Werth der nach y Jahren aufhörenden Rente.

Anmerkung. Multiplicirt man Zähler und Nenner der rechten Seite in der vorstehenden Formel mit λ_x, so ist

$$P_x^y = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}} \tag{37 a}$$

§. 18. Die jährlichen Prämien für die Versicherung auf Lebenszeit sollen nicht in gleichen, sondern in während bestimmter Perioden wachsenden oder abnehmenden Raten gezahlt werden. Diese Prämien mögen bezeichnet werden durch $P_x^<$ und ${}^>P_x$. Unter den verschiedenen Anordnungen, die man über das Steigen und Fallen der Prämien treffen kann, wählen wir folgende: Die Prämie wachse oder nehme ab gleichmäſsig von 5 zu 5 Jahren und zwar so, daſs nach Verlauf von 15 Jahren im ersten Fall das Doppelte, im zweiten Falle die Hälfte der ursprünglichen Prämie gezahlt wird, und diese Prämie werde dann bis zum Tode gezahlt.

Der Werth der Bankleistung ist hier wieder bei l_x solcher Versicherungen für $x$jährige Personen für den Einzelnen C_x.

I. Die Leistung der Versicherten zuerst bei steigenden Prämien gestaltet sich so:

Während der ersten 5 Jahre zahlt der Versicherte $P_x^<$, während der zweiten 5 Jahre $\frac{4}{3} \,.\, P_x^<$, während der dritten Periode von 5 Jahren $\frac{5}{3}\, P_x^<$ und dann auf Lebenszeit $2 \,.\, P_x^<$. Für den Einzelnen bildet diese Prämienzahlung zuerst eine sofort beginnende Rente mit dem jedesmaligen Betrage von $P_x^<$, dazu kommt eine zweite um 5 Jahre aufgeschobene Rente mit dem Betrage von $\frac{P_x^<}{3}$, dazu kommen ferner noch 2 Renten, die eine um 10 Jahre, die andere um 15 Jahre aufgeschoben, jede mit dem Betrage $\frac{P_x^<}{3}$, so daſs also der Werth der Prämienzahlung dargestellt wird, durch

$$P_x^< \,.\, R_x + \frac{P_x^<}{3}\left(\underset{5}{R}_x + \underset{10}{R}_x + \underset{15}{R}_x\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} P_x^< \left(3 \,.\, R_x + \underset{5}{R}_x + \underset{10}{R}_x + \underset{15}{R}_x\right)$$

Setzt man dies dem Werthe C_x gleich, so ist

$$P_x^< = \frac{3 \,.\, C_x}{3 R_x + \underset{5}{R}_x + \underset{10}{R}_x + \underset{15}{R}_x} \tag{38}$$

II. Bei abnehmenden Prämien wird während der ersten Periode die Prämie ${}^>P_x$ gezahlt, während der zweiten $\frac{5}{6}\,{}^>P_x$, während der dritten Periode $\frac{4}{6}\,{}^>P_x$ und dann bis

zum Tode $\frac{1}{2} . {}^{>}P_x$. Hier bildet die Prämienzahlung für den Einzelnen eine Rente auf Lebenszeit mit dem jährlichen Betrage $\frac{1}{2}\,{}^{>}P_x$, dann eine nach 5 Jahren aufhörende Rente mit dem Betrage $\frac{1}{6}\,{}^{>}P_x$, dann eine nach 10 Jahren aufhörende Rente ebenfalls mit dem Betrage $\frac{1}{6}\,{}^{>}P$, und endlich eine nach 15 Jahren aufhörende Rente mit demselben Betrage. Der Werth der Prämienzahlung wird also dargestellt durch

$$R_x . \frac{{}^{>}P_x}{2} + R_x^5 . \frac{{}^{>}P_x}{6} + R_x^{10} . \frac{{}^{>}P_x}{6} + R_x^{15} . \frac{{}^{>}P_x}{6}$$

$= \frac{1}{6} . {}^{>}P_x (3\,R_x + R_x^5 + R_x^{10} + R_x^{15})$, so dafs, da diese Prämienzahlung dem Werthe der Bankleistung C_x gleich sein mufs,

$$ {}^{>}P_x = \frac{6 . C_x}{3\,R_x + R_x^5 + R_x^{10} + R_x^{15}} \tag{39}$$

Führt man in die vorstehende Formel ein $R_x - {}_{5}R_x$ anstatt R_x^5. $R_x - {}_{10}R_x$ anstatt R_x^{10} und $R_x - {}_{15}R_x$ anstatt ${}_{15}R_x$, so erhält man

$$ {}^{>}P_x = \frac{6\,C_x}{6 R_x - ({}_{5}R_x + {}_{10}R_x + {}_{15}R_x)} \tag{39 a}$$

in welcher Gestalt diese Formel im Nenner dieselbe Summe von aufgeschobenen Renten hat wie Formel (38).

Multiplicirt man in beiden Formeln die rechten Seiten im Zähler und Nenner mit λ_x, so kann man dieselben auch so schreiben:

$$ P_x^{<} = \frac{3 \Sigma \tau_{x+1}}{3 \Sigma \lambda_x + \Sigma \lambda_{x+5} + \Sigma \lambda_{x+10} + \Sigma \lambda_{x+15}} \tag{38 a}$$

$$ {}^{>}P_x = \frac{6 \Sigma \tau_{x+1}}{6 \Sigma \lambda_x - (\Sigma \lambda_{x+5} + \Sigma \lambda_{x+10} + \Sigma \lambda_{x+15})} \tag{39 b}$$

Wird in beiden Fällen die Prämienzahlung nur bis zu einem bestimmten Alter fortgesetzt, so dafs sie, falls der Versicherte nicht früher stirbt, aufhört, wenn der Versicherte z Jahre alt ist, und die Prämie $(z-x)$mal gezahlt wird, so hat man, $z-x$ gleich y setzend und eine ähnliche Bezeichnung wie früher gebrauchend:

$$ P_x^{<y} = \frac{3\,C_x}{3 R_x^y + {}_{5}R_x^y + {}_{10}R_x^y + {}_{15}R_x^y} \tag{40}$$

$$ = \frac{3\,C_x}{3\,R_x + {}_{5}R_x + {}_{10}R_x + {}_{15}R_x - 6\,{}_{y}R_x}$$

$$ = \frac{3 \Sigma \tau_{x+1}}{3 \Sigma \lambda_x + \Sigma \lambda_{x+5} + \Sigma \lambda_{x+10} + \Sigma \lambda_{x+15} - 6 \Sigma \lambda_{x+y}}$$

$$ = \frac{3 \Sigma \tau_{x+1}}{3(\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}) + \Sigma \lambda_{x+5} - \Sigma \lambda_{x+y} + \Sigma \lambda_{x+10} - \Sigma \lambda_{x+y} + \Sigma \lambda_{x+15} - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

Da $y = z - x$, so ist $x + y = x + z - x = z$. Bezeichnet z ein bestimmtes Alter, z. B. das Alter von 85 Jahren, bei dem die Prämienzahlung aufhören soll, so ist es bequem, für jedes Alter $\Sigma \lambda - \Sigma \lambda z$ zu berechnen, und bezeichnet man

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\lambda_z = \overset{z}{\Sigma}_i, \text{ so ist}$$

$$P_x^{<y} = \frac{\Sigma\tau_{x+1}}{3\overset{z}{\Sigma}\lambda_x + \overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+5} + \overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+10} + \overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+15}} \tag{40a}$$

Ebenso ist

$$P_x^y = \frac{6\,C_x}{6\,R_x^y - (R_{5}^y{}_x + R_{10}^y{}_x + R_{15}^y{}_x)} \tag{41}$$

oder

$$= \frac{6\,\Sigma\tau_{x+1}}{6\overset{z}{\Sigma}\lambda_x - \left\{\overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+5} + \overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+10} + \overset{z}{\Sigma}\lambda_{x+15}\right\}} \tag{41a}$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daſs $y > 15$ ist.

§. 19. Lebensversicherung mit Carenzzeit. Die Summe ${}_yC_x$ soll bestimmt werden, welche eine $x$jährige Person an die Versicherungsbank zu zahlen hat, damit diese bei dem Tode jener die Summe 1 auszahlen kann unter der Bedingung, daſs die Versicherungssumme nicht gezahlt wird, wenn der Tod innerhalb der ersten y Jahre eintritt.

Man nennt eine solche Versicherung auch aufgeschobene Lebensversicherung, und die ersten y Jahre, während welcher Zeit die Versicherungsbank nicht in den Fall kommt, die Versicherungssumme zu zahlen, auch wenn der Versicherte in dieser Zeit stirbt, Carenzzeit oder Probejahre.

Hier findet, wenn von l_x $x$jährigen Personen jede eine solche Versicherung schlieſst, die erste Zahlung der Bank nach $y + 1$ Jahren statt. In dem $(y+1)$sten Jahre sterben t_{x+y+1} Personen, mithin zahlt die Bank die Summe t_{x+y+1}, und der gegenwärtige Werth dieser Summe ist $\frac{t_{x+y+1}}{p^{y+1}}$. Der jetzige Werth der folgenden Zahlungen ist $\frac{t_{x+y+2}}{p^{y+2}}$ etc. und somit beträgt der Werth sämmtlicher Zahlungen

$$\frac{t_{x+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{t_{x+y+2}}{p^{y+2}} + \frac{t_{x+y+3}}{p^{y+3}} + \dots\dots$$

Vertheilt man diese Summe auf die einzelnen Versicherungen, so ist die Bankleistung für die einzelne Versicherung

$$\frac{1}{l_x}\left(\frac{t_{x+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{t_{x+y+2}}{p^{y+2}} + \frac{t_{x+y+3}}{p^{y+3}} + \dots\dots\right)$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit p^x, so nimmt er die Form an:

$$\frac{1}{\frac{l^x}{p^x}}\left(\frac{t_{x+y+1}}{p^{x+y+1}} + \frac{t_{x+y+2}}{p^{x+y+2}} + \frac{l_{x+y+3}}{p^{x+y+3}} + \dots\dots\right)$$

$$= \frac{\tau_{x+y+1} + \tau_{x+y+2} + \tau_{x+y+3} + \dots\dots}{\lambda_x}$$

$$= \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}$$

Dieser Werth muſs der Einzahlung gleich sein, woraus folgt:

$${}_yC_x = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} \tag{42}$$

Die einmalige Prämie für die um y Jahre aufgeschobene Lebensversicherung findet man somit, indem man die Summe der discontirten Zahlen der Todten des um $(y+1)$ Jahr höheren Alters dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

Anmerkung. Multiplicirt man die rechte Seite der vorstehenden Formel mit $\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}$, so entsteht

$$ {}_yC_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+y}} $$

Nach Formel (32) ist aber

$$ \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+y}} = C_{x+y}, $$

also

$$ {}_yC_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot C_{(x+y)} \qquad (42\,a) $$

Die einmalige Prämie für die um y Jahre aufgeschobene Lebensversicherung wird hiernach erhalten, indem man die einmalige Prämie für die gewöhnliche Lebensversicherung ohne Carenzzeit für das um y Jahre höhere Alter multiplicirt mit der discontirten Zahl der Lebenden des um y Jahre höheren Alters und dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des jetzigen Alters.

§. 20. Soll die jährliche bis zum Tode zahlbare Prämie für diese Versicherung bestimmt werden, und wird dieselbe bezeichnet durch ${}_yP_x$, so ist die Bankleistung dieselbe, während die Prämienzahlung eine Rente auf Lebenszeit mit dem jährlichen Betrage ${}_yP_x$ ist, folglich den Werth hat ${}_yP_x \,.\, R_x$. Durch Gleichstellung beider Werthe ergiebt sich

$$ {}_yP_x \,.\, R_x = {}_yC_x, \text{ oder} $$

$$ {}_yP_x = \frac{{}_yC_x}{R_x} \qquad (43) $$

Auch hier wird die jährliche Prämie für die aufgeschobene Lebensversicherung gefunden, indem man die einmalige Prämie durch den Werth der Leibrente dividirt.

Anmerkung 1. Multiplicirt man Zähler und Nenner der rechten Seite in der vorstehenden Formel mit λ_x, so ist

$$ {}_yP_x = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\Sigma\lambda_x} $$

Multiplicirt man noch mit $\frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_{x+y}}$, so ist

$$ {}_yP_x = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x} \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\Sigma\lambda_{x+y}} $$

Nach Formel (36a) ist aber

$$ \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\Sigma\lambda_{x+y}} = P_{x+y}, $$

also

$$ {}_yP_x = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x} \cdot P_{x+y} \qquad (43\,b) $$

Die jährliche Prämie für die um y Jahre aufgeschobene Lebensversicherung findet man also auch, indem man die jährliche Prämie für die gewöhnliche Lebensversicherung ohne Carenzzeit aber für das um y Jahre höhere Alter mit der Summe der discontirten Zahlen der Lebenden des um y Jahre höheren Alters multiplicirt und durch die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden des gegenwärtigen Alters dividirt.

Anmerkung 2. Soll die Prämienzahlung nicht bis zum Tode, sondern nur z Jahre hindurch gezahlt werden, so wird aus dem Nenner R_x in Formel (43), wie leicht erhellt, die nach z Jahren aufhörende Rente; d. h. wenn ${}_yP^z_x$ die entsprechende Prämie bezeichnet:

$$ {}_yP^z_x = \frac{{}_yC_x}{R^z_x} \tag{44}$$

oder

$$ {}_yP^z_x = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+z}} \tag{44 a}$$

Ist $z = y$, unter welcher Bedingung die jährliche Prämie nur während der Carenzzeit gezahlt würde, so ist

$$ {}_yP^y_x = \frac{{}_yC_x}{R^y_x} \tag{45}$$

oder

$$ {}_yP^y_x = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} \tag{45 a}$$

§. 21. Hat die Lebensversicherung mit Carenzzeit die Bedingung, daſs im Fall des Todes innerhalb der Carenzzeit bei einmaliger Zahlung die eingezahlte Summe, bei jährlicher Prämienzahlung die bis zum Tode gezahlten Prämien, in beiden Fällen ohne Zinsen, zurückgegeben werden, so gestaltet sich die Bankleistung folgendermaſsen:

I. Die einmalige Prämie sei hier ${}_yCr_x$. Für die nach y Jahren eintretenden Sterbefälle ist die Bankleistung in Bezug auf die einzelne Versicherung

$$\frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} = {}_yC_x$$

Hierzu kommt die Rückgewähr während der ersten y Jahre. Im ersten Jahre sterben von l_x $x$jährigen Personen t_{x+1}, an diese zahlt die Bank $t_{x+1} \cdot {}_yCr_x$, weil jeder derselben ${}_yCr_x$ eingezahlt hat. Der jetzige Werth dieser Summe ist $\frac{t_{x+1}}{p} \cdot {}_yCr$. Ebenso findet man als Werth der Rückgewähr für das zweite Jahr $\frac{t_{x+2}}{p^2} \cdot {}_yCr_x$ etc. und als Werth der letzten Rückgewähr nach y Jahren $\frac{t_{x+y}}{p^y} \cdot {}_yCr_x$. Mithin beträgt die ganze Rückgewähr

$$ {}_yCr_x \left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y}\right),$$

und diese auf die einzelnen Versicherungen vertheilt, ergiebt

$$\frac{{}_yCr_x}{l_x}\left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y}\right)$$
$$= \frac{{}_yCr_x}{\frac{l_x}{p^x}}\left(\frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{t_{x+2}}{p^{x+2}} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^{x+y}}\right)$$
$$= {}_yCr_x \cdot \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots \tau_{x+y}}{\lambda_x}$$
$$= {}_yCr_x \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}$$

Setzt man die Einzahlung des Versicherten der Summe aus den beiden Bankleistungen gleich, so ist

$$ {}_yCr_x = {}_yCr_x \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} + \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}$$

oder, indem man das erste Glied der rechten Seite transponirt,

$${}_yCr_x\left(1-\frac{\Sigma\tau_{x+1}-\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}\right)=\frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x},\text{ oder}$$

$${}_yCr_x=\frac{\frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}}{1-\frac{\Sigma\tau_{x+1}-\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}} \tag{46}$$

$$=\frac{{}_yC_x}{1-C_x+{}_yC_x} \tag{46 a}$$

oder, indem man Zähler und Nenner mit λ_x multiplicirt,

$${}_yCr_x=\frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x-(\Sigma\tau_{x+1}-\Sigma\tau_{x+y+1})} \tag{46 b}$$

II. Bedeutet ${}_yPr_x$ die jährliche Prämie, so ist hier der Werth der Rückgewähr nach einem Jahre $\frac{t_{x+1}}{p}\cdot{}_yPr_x$, dagegen der Werth der Rückgewähr am Ende des zweiten Jahres $\frac{t_{x+2}}{p^2}\cdot 2\,{}_yPr_x$, denn die im zweiten Jahre Sterbenden haben 2 Prämien eingezahlt. Entsprechend hat die Rückgewähr nach 3, 4 etc. Jahren den Werth $\frac{t_{x+3}}{p^3}\cdot 3\,{}_yPr_x$, $\frac{t_{x+4}}{p^4}\cdot 4\,{}_yPr_x$ etc., so dafs die Gesammtrückgewähr für die einzelne Versicherung beträgt:

$$\frac{{}_yPr_x}{l_x}\left(\frac{t_{x+1}}{p}+2\frac{t_{x+2}}{p^2}+\ldots\ldots y\frac{t_{x+y}}{p^y}\right)$$

$$=\frac{{}_yPr_x}{\frac{l_x}{p^x}}\left(\frac{t_{x+1}}{p^{x+1}}+2\frac{t_{x+2}}{p^{x+2}}+\ldots\ldots y\frac{t_{x+y}}{p^{x+y}}\right)$$

$$={}_yPr_x\cdot\frac{\tau_{x+1}+2\tau_{x+2}+\ldots\ldots y\,\tau_{x+y}}{\lambda_x}$$

Früher schon ist bezeichnet worden

$$\tau_{x+1}+2\tau_{x+2}+3\tau_{x+3}+\ldots\ldots y\,\tau_{x+y}=T^y_{x+1},$$

mithin beträgt der Werth der Rückgewähr

$${}_yPr\cdot\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x},$$

der übrige Theil der Bankzahlung bleibt

$${}_yC_x,$$

während der Werth der Prämienzahlung ausgedrückt wird durch $R_x\cdot{}_yPr_x$, so dafs also

$$R_x\cdot{}_yPr_x={}_yPr\cdot\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}+{}_yC_x\text{ oder}$$

$${}_yPr_x\left(R_x-\frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}\right)={}_yC_x,\text{ folglich}$$

$$ {}_yPr_x = \frac{{}_yC_x}{R_x - \frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}}, \text{ oder} \tag{47} $$

$$ {}_yPr_x = \frac{\Sigma \tau_{x+y+1}}{\Sigma \lambda_x - T^y_{x+1}}, \tag{47 a} $$

was sich ergiebt durch Multiplication in Zähler und Nenner mit λ_x. Dividirt man dagegen Zähler und Nenner der letzten Formel mit $\Sigma \lambda_x$, so erscheint

$$ {}_yPr_x = \frac{\frac{\Sigma \tau_{x+y+1}}{\Sigma \lambda_x}}{1 - \frac{T^y_{x+1}}{\Sigma \lambda_x}}, \text{ d. h.} $$

$$ {}_yPr_x = \frac{{}_yP_x}{1 - \frac{T^y_{x+1}}{\Sigma \lambda_x}} \tag{47 b} $$

Anmerkung. Soll die Prämienzahlung nicht bis zum Tode dauern, sondern die Prämie nur $z$mal gezahlt werden, so setzt man einfach R^z_x statt R_x und hat

$$ {}_yPr^z_x = \frac{{}_yC_x}{R^z_x - \frac{T^y_{x+1}}{\lambda_x}} \tag{48} $$

§. 22. Kurze Lebensversicherung. Der Lebensversicherung mit Carenzzeit ist entgegengesetzt die kurze Lebensversicherung. Hier wird die Versicherungssumme nur gezahlt, wenn der Tod innerhalb der ersten y Jahre erfolgt. Die dieser Versicherung entsprechende einmalige Prämie sei ${}^yC_x$, und die jährliche Prämie ${}^yP_x$.

I. Die Leistung der Bank bei l_x Versicherungen für $x$jährige Personen ist hier offenbar

$$ \frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y} $$

Dies durch l_x dividirt, giebt für die einzelne Versicherung

$$ {}^yC_x = \frac{1}{l_x}\left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y}\right) $$

$$ = \frac{1}{\frac{l_x}{p_x}}\left(\frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \frac{t_{x+2}}{p_{x+2}} + \ldots\ldots \frac{t_{x+1}}{p^{x+y}}\right) $$

$$ = \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots \tau_{x+y}}{\lambda_x}, \text{ also} $$

$$ {}^yC_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1}}{\lambda_x}, \tag{49} $$

oder

$$ {}^yC_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} - \frac{\Sigma \tau_{x+y+1}}{\lambda_x}, $$

d. h.

$$ {}^yC_x = C_x - {}_yC_x \tag{49 a} $$

oder

$$ {}^yC_x = C_x - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot C_{x+y} \tag{49 b} $$

Die einmalige Prämie für die kurze Lebensversicherung auf y Jahre findet man, indem von der Summe der discontirten Zahlen der Todten für das um 1 Jahr höhere Alter die Summe der discontirten Zahlen der Todten für das um $(y+1)$ Jahr höhere Alter abzieht und diese Differenz dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters — oder indem man von der einmaligen Prämie für die gewöhnliche Lebensversicherung die einmalige Prämie für die um y Jahre aufgeschobene Lebensversicherung abzieht.

II. Der Werth der jährlichen Prämienzahlung ist gleich dem Werth einer nach y Jahren aufhörenden Rente mit dem jedesmaligen Betrage ${}^yP_x$, also ist hier

$$R_x^y \,.\, {}^yP_x = {}^yC_x, \text{ und somit}$$

$${}^yP_x = \frac{{}^yC_x}{R_x^y} \tag{50}$$

Mit Hülfe von Formel (49a) verwandelt man vorstehenden Ausdruck in

$${}^yP_x = \frac{C_x}{R_x^y} - \frac{{}_yC_x}{R_x^y},$$

oder

$${}^yP_x = P_x^y - {}_yP_x^y, \tag{50a}$$

welche Formel dieselbe Beziehung zwischen den jährlichen Prämien für die kurze, die aufgeschobene und die gewöhnliche Lebensversicherung ausdrückt, wie Formel (49a) für die jährlichen Prämien.

Anmerkung 1. Formel (28) zeigt, daſs

$$\Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x - \frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_x,$$

mithin ist

$${}^yC_x = \frac{\lambda_x - \frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_x - \lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

$$= \frac{\lambda_x - \lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y})}{\lambda_x}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

oder

$${}^yC_x = 1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - \frac{p-1}{p} \cdot R_x^y \tag{49c}$$

Anmerkung 2. Aus Formel (46a) wird jetzt

$${}_yCr_x = \frac{{}_yC_x}{1 - {}^yC_x} \tag{46b}$$

und aus Formel (24a) wird

$${}_yRr_x = \frac{{}_yR_x}{1 - C_x + {}_yC_x} \tag{24b}$$

$$= \frac{{}_yR_x}{1 - {}^yC_x} \tag{24c}$$

§. 23. Kurze Lebensversicherung mit Rückgewähr. Erfolgt der Tod des Versicherten nicht innerhalb der ersten y Jahre bei einer Lebensversicherung auf y Jahre, so geht der Versicherte leer aus. — Es könnte daher von vorne herein die

Bedingung an die Versicherung geknüpft werden, dafs der Versicherte, falls er innerhalb der Versicherungsdauer nicht stirbt, das eingezahlte Kapital oder die eingezahlten jährlichen Prämien ohne Zinsen zurückerhalte. Die Kapitalzahlung werde hier bezeichnet durch ${}_yCr_x$ und die jährliche Prämie durch ${}^yPr_x$.

I. Im ersten Fall hat die Bank bei l_x solcher Versicherungen für $x$jährige Versicherte noch aufser der oben angegebenen Leistung den nach y Jahren noch lebenden l_{x+y} Personen auszuzahlen $l_{x+y} \,.\, {}^yCr_x$. Diese Zahlung findet nach y Jahren statt, hat also den Werth $\frac{l_{x+y}}{p^y} \,.\, {}^yCr_x$, und auf die einzelne Versicherung kommt hiervon

$$\frac{l_{x+y}}{l_x \,.\, p^y} \,.\, {}^yCr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \,.\, {}^yCr_x$$

Mithin ist

$$ {}^yCr_x = {}^yC_x + \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \,.\, {}^yCr_x \text{ oder}$$

$$ {}^yCr_x = \frac{{}^yC_x}{1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}}, \text{ oder} \tag{51}$$

$$ = \frac{\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1}}{\lambda_x - \lambda_{x+y}} \tag{51a}$$

II. Bei jährlicher Prämienzahlung hat die Bank den l_{x+y} nach y Jahren noch lebenden Versicherten zu zahlen $l_{x+y} \,.\, y \,.\, {}^yPr_x$, da jeder Einzelne der am Leben bleibenden y Prämien gezahlt hat. Diese Summe um y Jahre abgezinst und durch l_x dividirt wird für die einzelne Versicherung

$$y \,.\, \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \,.\, {}^yPr_x,$$

und somit ist

$$R_x^y \,.\, {}^yPr_x = {}^yC_x + y \,.\, \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \,.\, {}^yPr_x$$

oder

$$ {}^yPr_x = \frac{{}^yC_x}{R_x^y - y \,.\, \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}} \tag{52}$$

oder

$$ = \frac{\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+y+1}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y} - y \,.\, \lambda_{x+y}} \tag{52a}$$

Dividirt man in der letzten Formel Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}$, so ergiebt sich

$$ {}^yPr'_x = \frac{{}^yP_x}{1 - \frac{y \,.\, \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}} \tag{52b}$$

oder

$$ = \frac{{}^yP_x}{1 - \frac{y \,.\, \lambda_{x+y}}{\lambda_x \,.\, R_x^y}} \tag{52c}$$

B. Kapital-Versicherung auf den Lebensfall.

§. 24. Eine Anzahl von l_x Personen in dem Alter von x Jahren versichern sich der Art, daſs diejenigen, welche nach y Jahren noch leben, alsdann die Versicherungssumme 1 erhalten. Es fragt sich, wieviel für den Einzelnen die einmalige Prämie und wieviel die jährliche Prämie, zahlbar während der y Jahre, beträgt. Die einmalige Prämie sei ${}^yCl_x$ und die jährliche ${}^yPl_x$.

I. Die Versicherungsbank hat im Ganzen nach y Jahren, da alsdann noch l_{x+y} Personen leben, zu zahlen l_{x+y}, wovon der gegenwärtige Werth $\frac{l_{x+y}}{p^y}$ ist. Der hiervon auf die einzelne Versicherung kommende Betrag ist $\frac{\frac{l_{x+y}}{p^y}}{l_x} = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}$ und da dies der Einzahlung gleich sein muſs, so ist

$$ {}^yCl_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \tag{53}$$

Die einmalige Prämie wird hier gefunden, indem man die discontirte Zahl der Lebenden des um y Jahre höheren Alters dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

II. Bei jährlicher Prämienzahlung ist der Werth derselben gleich dem Werth einer nach y Jahren aufhörenden Rente in dem jährlichen Betrage von ${}^yPl_x$, also $= {}^yPl_x \,.\, R^y_x$, und da der Werth der Bankleistung derselbe ist, wie bei einmaliger Prämienzahlung, so ist

$$ {}^yPl_x \,.\, R^y_x = {}^yCl_x $$

oder

$$ {}^yPl_x = \frac{{}^yCl_x}{R^y_x} \tag{54}$$

man dividirt also wieder die einmalige Prämie durch den Werth der der Prämienzahlung entsprechenden Rente.

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit λ_x, so ist

$$ {}^yPl_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}. \tag{54a}$$

Anmerkung. Mit Hülfe der in diesem Paragraphen aufgestellten Formeln kann man Formel (49c) auch so schreiben

$$ {}^yC_x = 1 - {}^yCl_x - \frac{p-1}{p} R^y_x \tag{49d}$$

aus (51) entsteht

$$ {}^yCr_x = \frac{{}^yC_x}{1 - {}^yCl_x} \tag{51b}$$

und aus (52) wird

$$ {}^yPr_x = \frac{{}^yC_x}{R^y_x - y \,.\, {}^yCl_x} \tag{52d}$$

und endlich aus (52b) entsteht

$$ {}^yPr_x = \frac{{}^yP_x}{1 - y \,.\, {}^yPl_x} \tag{52e}$$

§. 25. Bei einer Versicherung, wie sie im vorigen Paragraphen behandelt ist, geht der Versicherte leer aus, wenn er vor Erreichung des Alters von $(x+y)$ Jahren stirbt. Er kann aber die Bedingung stellen, daſs bei früher eintretendem Tode die eingezahlten Prämien, aber ohne Zinsen zurückgegeben werden.

Die einmalige und die jährliche Prämie für solche Versicherung mit Rückgewähr sei ${}^{y}Clr_x$ und ${}^{y}Plr_x$.

I. Bei einmaliger Beitragszahlung zahlt die Bank bei l_x solcher Versicherungen nach einem Jahre wegen der in diesem Jahre eintretenden t_{x+1} Sterbefälle $t_{x+1} \,.\, {}^{y}Clr_x$, welche Summe jetzt den Werth hat $\frac{t_{x+1}}{p} \,.\, {}^{y}Clr_x$. Der Werth der Rückgewähr des zweiten Jahres ist entsprechend $\frac{t_{x+2}}{p^2} \,.\, {}^{y}Clr_x$ etc. und die Rückgewähr des letzten, d. h. des $y$ten Jahres beträgt $\frac{t_{x+y}}{p^y} \,.\, {}^{y}Clr_x$, und somit beträgt die Gesammtrückgewähr:

$$ {}^{y}Clr_x \left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y} \right), $$

wovon auf die einzelne Versicherung kommt

$$ {}^{y}Clr_x \,.\, \frac{\dfrac{t_{x+1}}{p} + \dfrac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \dfrac{t_{x+y}}{p^y}}{l_x} $$

$$ = {}^{y}Clr_x \,.\, \frac{\dfrac{t_{x+1}}{p^{x+1}} + \dfrac{t_{x+2}}{p^{x+2}} + \ldots\ldots \dfrac{t_{x+y}}{p^{x+y}}}{\dfrac{l_x}{p_x}} $$

$$ = {}^{y}Clr_x \,.\, \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots \tau_{x+y}}{\lambda_x} $$

$$ = {}^{y}Clr_x \,.\, \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} $$

$$ = {}^{y}Clr_x \,.\, {}^{y}C_x \text{ [mit Hülfe von Formel (49)]} $$

Hierzu kommt nun noch die Leistung der Bank für die nach y Jahren noch Lebenden, welche für die einzelne Versicherung ${}^{y}Cl_x$ beträgt, und somit ist

$$ {}^{y}Clr_x = {}^{y}Clr_x \,.\, {}^{y}C_x + {}_{y}Cl_x, \text{ oder} $$

$$ {}^{y}Clr_x = \frac{{}^{y}Cl_x}{1 - {}^{y}C_x} \tag{55} $$

oder wenn man Zähler und Nenner mit λ_x multiplicirt:

$$ {}^{y}Clr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})} \tag{55 a} $$

II. Bei jährlicher Prämienzahlung gestaltet sich die Gesammtrückgewähr so:

$$ {}^{y}Plr_x \left(\frac{t_{x+1}}{p} + 2\,\frac{t_{x+2}}{p^2} + 3\,\frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots y \,.\, \frac{t_{x+y}}{p^y} \right) $$

Dividirt man diese Summe durch l_x, und dividirt dann noch Zähler und Nenner mit p^x, so hat man als den auf die einzelne Versicherung kommenden Theil der Rückgewähr

$$ {}^{y}Plr_x \,.\, \frac{\tau_{x+1} + 2\tau_{x+2} + 3\tau_{x+3} + \ldots\ldots y\tau_{x+y}}{\lambda_x} $$

$$ = {}^{y}Plr_x \,.\, \frac{T^{y}_{x+1}}{\lambda_x} $$

Addirt man hierzu ${}^yCl_x$, so hat man die Gesammtleistung der Bank für die einzelne Versicherung, während die Prämienzahlung den Werth ${}^yPlr_x \,.\, R_x^y$ hat; es ist also

$$ {}^yPlr_x \,.\, R_x^y = {}^yPlr_x \,.\, \frac{T_{x+1}^y}{\lambda_x} + {}^yCl_x $$

oder

$$ {}^yPlr_x = \frac{{}^yCl_x}{R_x^y - \frac{T_{x+1}^y}{\lambda_x}}, \tag{56} $$

oder, wenn man mit λ_x Zähler und Nenner der rechten Seite multiplicirt

$$ {}^yPlr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - T_{x+1}^y} \tag{56a} $$

oder mit Anwendung von Formel (30)

$$ {}^yPlr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{y \,.\, \lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p} L_x^y} \tag{56b} $$

Anmerkung. Sollen die eingezahlten Prämien bei vorzeitigem Sterben des Versicherten nicht unmittelbar nach dem Tode, sondern erst an dem Termine zurückgezahlt werden, an dem die Versicherungssumme zur Auszahlung käme, falls der Versicherte so lange lebte, so gestalten sich die Formeln anders.

I. Bei einmaliger Prämienzahlung hat die Bank an dem Fälligkeitstermine an jeden der l_{x+y} Lebenden die Versicherungssumme 1 zu zahlen und für jeden der Gestorbenen, deren Anzahl $l_x - l_{x+y}$ ist, die einmalige Zahlung ${}^yClr_x$ zurückzugeben. Die Bankleistung beträgt also an diesem Termin

$$ l_{x+y} + (l_x - l_{x+y})\, {}^yClr_x, $$

welche Summe beim Beginn der Versicherungen, d. h. um y Jahre früher, den Werth hat:

$$ \frac{1}{p^y} \left\{ l_{x+y} + (l_x - l_{x+y})\, {}^yClr_x \right\}. $$

Dieser Werth, der Einzahlung gleich gesetzt, giebt

$$ l_x \,.\, {}^yClr_x = \frac{1}{p^y} \left\{ l_{x+y} + (l_x - l_{x+y})\, {}^yClr_x \right\} $$

oder

$$ {}^yClr_x = \frac{\frac{1}{p^y} \,.\, l_{x+y}}{l_x - \frac{1}{p^y}(l_x - l_{x+y})} $$

$$ = \frac{l_{x+y}}{p^y \,.\, l_x - l_x + l_{x+y}} $$

$$ = \frac{l_{x+y}}{l_{x+y} + (p^y - 1)\, l_x} $$

oder dividirt man Zähler und Nenner der rechten Seite durch l_{x+y}, so ist

$$ {}^yClr_x = \frac{1}{1 + (p^y - 1)\frac{l_x}{l_{x+y}}} \tag{56c} $$

II. Bei jährlicher Prämienzahlung beträgt die Rückgewähr am Ende der Versicherungszeit für die im ersten Jahre gestorbenen Versicherten

$$ t_{x+1}\, {}^yPlr_x = (l_x - l_{x+1})\, {}^yPlr_x, $$

für die im 2. Jahre gestorbenen

$$ 2\, t_{x+2}\, {}^yPlr_x = 2(l_{x+1} - l_{x+2})\, {}^yPlr_x, $$

für die im 3. Jahre gestorbenen

$$3\, t_{x+3}\, {}^yPlr_x = 3\,(l_{x+2} - l_{x+3})\, {}^yPlr_x,$$

etc. und für die Sterbefälle des letzten Jahres

$$y\, t_{x+y}\, {}^yPlr_x = y\,(l_{x+y-1} - l_{x+y})\, {}^yPlr_x.$$

Die Rückgewähr beträgt mithin im Ganzen

$$ {}^yPlr_x\,[l_x - l_{x+1} + 2\,(l_{x+1} - l_{x+2}) + 3\,(l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots\ldots y\,(l_{x+y-1} - l_{x+y})]$$
$$= {}^yPlr_x\,(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots\ldots l_{x+y+1} - y\,.\,l_{x+y})$$

und bezeichnet Σl_x die Summe der Zahlen der Lebenden des Alters von x Jahren und aller höheren Alter, so kann man den Werth der Rückgewähr auf die Form bringen

$$ {}^yPlr_x\,(\Sigma l_x - \Sigma l_{x+y} - y\,.\,l_{x+y})$$

Zieht man diese Summe um y Jahre ab, und addirt man dazu den jetzigen Werth der an die l_{x+y} das Ende der Versicherungszeit erlebenden Personen zu zahlenden Versicherungssumme, so mufs diese Summe der Einzahlung gleich sein, und man hat, wenn auf beiden Seiten mit p^x dividirt wird:

$$ {}^yPlr_x\,(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}) = \frac{l_{x+y}}{p^{x+y}} + \frac{{}^yPlr_x}{p^{x+y}}\,(\Sigma l_x - \Sigma l_{x+y} - y\,.\,l_{x+y})$$

woraus folgt

$$ {}^yPlr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - \frac{1}{p^{x+y}}\,(\Sigma l_x - \Sigma l_{x+y} - y\,.\,l_{x+y})}$$

oder

$$Plr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{y\,\lambda_{x+y} + \Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - \frac{\Sigma l_x - \Sigma l_{x+y}}{p^{x+y}}} \qquad (56\text{ d})$$

Sowohl hier als in der Formel für die Berechnung der einmaligen Zahlung hat man darauf zu achten, dafs man die Zahlen der Lebenden und die Summen der Zahlen der Lebenden nicht verwechselt mit den discontirten Zahlen der Lebenden und den Summen aus diesen Zahlen.

C. Gemischte Versicherungen.

§. 26. Eine $x$jährige Person will das Kapital 1 so versichern, dafs dasselbe zahlbar ist nach y Jahren, oder beim Tode, falls derselbe vor Ablauf der y Jahre eintritt. Es soll hierfür die einmalige Prämie ${}^y\mathfrak{K}_x$ und die jährliche Prämie ${}^y\mathfrak{P}_x$ berechnet werden. Letztere wird $y$mal gezahlt, oder nur bis zum Tode, falls derselbe früher eintritt.

I. Die Bankleistung bei l_x solcher Versicherungen ist hier nach einem Jahre t_{x+1}, da von l_x $x$jährigen Personen im ersten Jahre t_{x+1} sterben; und der gegenwärtige Werth dieser Summe ist $\frac{t_{x+1}}{p}$; ebenso ist der Werth der Bankleistung des zweiten, dritten etc. Jahres $\frac{t_{x+2}}{p^2}$, $\frac{t_{x+3}}{p^3}$ etc. bis zum $y$ten Jahre, wo der Werth der Bankleistung $\frac{t_{x+y}}{p^y}$ ist. Nach y Jahren kommt noch die Auszahlung der Versicherungssumme 1 an jeden der nach y Jahren noch lebenden Versicherten, die Anzahl dieser ist l_{x+y}, und der jetzige Werth der an die Lebenden zu zahlenden Summe ist $\frac{l_{x+y}}{p^y}$. Als Gesammtleistung der Bank findet man folglich

$$\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y}}{p^y}$$

Vertheilt man diese Summe auf sämmtliche l_x Versicherungen, und setzt den Theil davon, der auf die einzelne Versicherung kommt, der Kapitalzahlung des einzelnen Versicherten gleich, so hat man

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = \frac{\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \ldots\ldots \frac{t_{x+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y}}{p^y}}{l_x} $$

Dividirt man hier Zähler und Nenner der rechten Seite durch p^x, so wird

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \tau_{x+3} + \ldots\ldots \tau_{x+y} + \lambda_{x+y}}{\lambda_x} $$

oder

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_x} \tag{57} $$

Nach der Formel (28) ist

$$ \Sigma\tau_{x+1} = \lambda_x - \frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_x, \text{ und} $$

ebenso

$$ \Sigma\tau_{x+y+1} = \lambda_{x+y} - \frac{p-1}{p}\,.\,\Sigma\lambda_{x+y} $$

Mit Hülfe dieser Formeln wird

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = \frac{\lambda_x - \frac{p-1}{p}\,.\,\Sigma\lambda_x - \lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p}\Sigma\lambda_{x+y} + \lambda_{x+y}}{\lambda_x} $$

$$ = \frac{\lambda_x - \frac{p-1}{p}(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y})}{\lambda_x} $$

oder

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = 1 - \frac{p-1}{p}\,.\,\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}, \text{ oder} \tag{57 a} $$

$$ {}^y\mathfrak{K}_x = 1 - \frac{p-1}{p}\,.\,R_x^y \tag{57 b} $$

Hiernach findet man die einmalige Prämie, indem man (Formel 57) von der Summe der discontirten Zahlen der Todten des um 1 Jahr höheren Alters die Summe der discontirten Zahlen des um $(y+1)$ Jahr höheren Alters abzieht, zu dieser Differenz die discontirte Zahl der Lebenden des um y Jahre höheren Alters addirt und dann durch die discontirte Zahl der Lebenden addirt, oder (Formel 57 b) indem man die nach y Jahren aufhörende Rente mit dem Bruche $\frac{p-1}{p}$ multipltcirt und das Product von 1 abzieht.

II. Bei jährlicher Prämienzahlung ist der Werth derselben, da sie y Jahre mit dem jährlichen Betrage ${}^y\mathfrak{P}_x$ dauert, ${}^y\mathfrak{P}_x\,.\,R_x^y$, und somit ist, indem dieser Werth dem Werth der Bankleistung also $= {}^y\mathfrak{K}_x$ gesetzt wird,

$$ {}^y\mathfrak{P}_x\,.\,R_x^y = {}^y\mathfrak{K}_x, \text{ d. h.} $$

$$ {}^y\mathfrak{P}_x = \frac{{}^y\mathfrak{K}_x}{R_x^y} \tag{58} $$

oder

$$= \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_x^y}{R_x^y},$$

woraus folgt

$$ {}^y\mathfrak{P}_x = \frac{1}{R_x^y} - \frac{p-1}{p} \qquad (58\,a)$$

Die jährliche Prämie ist hiernach gleich der einmaligen Prämie dividirt durch den Werth der nach y Jahren aufhörenden Rente, oder der umgekehrte Werth dieser nach y Jahren aufhörenden Rente vermindert um den Bruch $\frac{p-1}{p}$.

Anmerkung 1. Aus Formel (57) ergiebt sich ferner

$${}^y\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}, \text{ d. h.}$$

$${}^y\mathfrak{R}_x = {}^yC_x + {}^yCl_x \qquad (57\,c)$$

oder auch

$${}^y\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1}}{\lambda_x} - \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}, \text{ d. h.}$$

$${}^y\mathfrak{R}_x = C_x - {}_yC_x + {}_yCl_x \qquad (57\,d)$$

Ebenso giebt Formel (58)

$${}^y\mathfrak{P}_x = {}^yP_x + {}^yPl_x \qquad (58\,b)$$

oder auch

$${}^y\mathfrak{P}_x = P_x^y - {}_yP_x^y + {}^yPl_x \qquad (58\,c)$$

Die einmalige sowohl als auch die jährliche Prämie ist hier gleich der Summe aus den entsprechenden Prämien für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall und die kurze Lebensversicherung.

Diese Formeln hätte man auch so ableiten können. Die in Rede stehende Versicherung kann angesehen werden als zwei andere, nämlich als eine kurze Lebensversicherung, wofür die Prämien sind ${}^yC_x$ oder ${}^yP_x$ und als eine Versicherung auf den Lebensfall, wofür die Prämien resp. ${}^yCl_x$ und ${}^yPl_x$ sind, mithin mufste sein

$${}^y\mathfrak{R}_x = {}^yC_x + {}^yCl_x$$

$$\text{und } {}^y\mathfrak{P}_x = {}^yP_x + {}^yPl_x$$

Anmerkung 2. Gewöhnlich werden bei der Versicherung auf Lebenszeit nicht die in §. 15 und 16 entwickelten Formeln angewandt, sondern die Formeln dieses §., da gewöhnlich an die Versicherung die Bedingung geknüpft ist, dafs der Versicherte, wenn er ein bestimmtes Alter erreicht (etwa 90 Jahre alt wird), aufhört die Prämie zu zahlen und die Versicherungssumme erhält. Oft ist die Versicherung auf Lebenszeit so, dafs die jährliche Prämie nur bis zu einem bestimmten Alter (etwa bis zum Alter von 85 Jahren) gezahlt wird, dagegen die Versicherungssumme beim Tode gezahlt wird, oder wenn der Versicherte ein bestimmtes anderes Alter (etwa von 90 Jahren) erreicht. Hier wäre

$${}^{90-x}\mathfrak{R}_x = 1 - \frac{p-1}{p} R_x^{90-x}$$

$$\text{und } {}^{90-x}\mathfrak{P}_x^{85-x} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} . R_x^{90-x}}{R_x^{85-x}}$$

§. 27. Wir fügen hier noch hinzu die Kapitalversicherung mit bestimmter Verfallzeit. Das Kapital 1 wird von einem $x$jährigen so versichert, dafs dasselbe nach y Jahren gezahlt wird, gleichviel ob der Versicherte alsdann noch am Leben ist, oder nicht, während die jährliche Prämie $\mathfrak{P}b_x^y$ $y$mal oder nur bis zum Tode des Versicherten gezahlt wird, wenn derselbe innerhalb der y Jahre sterben sollte.

Der Werth der nach y Jahren zahlbaren Summe ist $\frac{1}{p^y}$. Hierfür leistet der Versicherte eine jährliche Prämienzahlung, die den Werth hat

$$\mathfrak{P}\, b_x^y \,.\, R_x^y, \text{ und somit ist}$$

$$\mathfrak{P}\, b_x^y \,.\, R_x^y = \frac{1}{p^y},$$

woraus folgt

$$\mathfrak{P}\, b_x^y = \frac{1}{p^y \,.\, R_x^y} \tag{59}$$

d. h. um die jährliche Prämie zu finden, dividirt man $\frac{1}{p^y}$, den gegenwärtigen Werth der nach y Jahren zahlbaren Summe 1 durch den Werth der nach y Jahren aufhörenden Rente.

Wenn man mit λ_x Zähler und Nenner der rechten Seite multiplicirt, so wird

$$\mathfrak{P}\, b_x^y = \frac{\lambda_x}{p^y\,(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y})} \tag{59a}$$

Anmerkung. Die Kapitalzahlung ${}^y\mathfrak{K}$ für diese Versicherung ist einfach ohne Rücksicht auf die Sterblichkeit der gegenwärtige Werth der nach y Jahren zahlbaren Summe 1, d. h.

$${}^y\mathfrak{K} = \frac{1}{p^y}. \tag{60}$$

Soll auch eine jährliche Prämie ${}^y\mathfrak{P}$ bestimmt werden, die ohne Rücksicht auf die Sterblichkeit y Jahre hindurch gezahlt werden soll, damit nach y Jahren die Summe 1 gezahlt werden kann, so ist der gegenwärtige Werth dieser Prämienzahlung

$$\begin{aligned}&{}^y\mathfrak{P}\,.\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\ldots \frac{1}{p^{y-1}}\right)\\ &= {}^y\mathfrak{P}\,.\,\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^y - 1}{\frac{1}{p} - 1}\\ &= {}^y\mathfrak{P}\,.\,\frac{1 - p^y}{(1-p)\,p^{y-1}}\,.\end{aligned}$$

Da dieser Werth dem Werth der nach y Jahren fälligen Summe gleich sein mufs, so ist

$${}^y\mathfrak{P}\,.\,\frac{1 - p^y}{(1-p)\,p^{y-1}} = \frac{1}{p^y},$$

oder

$$\begin{aligned}{}^y\mathfrak{P} &= \frac{1}{p^y}\,.\,\frac{(1-p)\,p^{y-1}}{1 - p^y}\\ &= \frac{1-p}{p\,(1-p^y)}, \text{ oder}\end{aligned}$$

$${}^y\mathfrak{P} = \frac{p-1}{p}\,.\,\frac{1}{p^y - 1} \tag{61}$$

Dritter Abschnitt.

Renten-Versicherung für verbundene Leben.

§. 28. Es mögen gegenwärtig $l_x . l_u$ $x$jährige und $l_x . l_u$ $u$jährige Personen $l_x . l_u$ Paare so bilden, daſs jedes einzelne Paar aus einer $x$jährigen und einer $u$jährigen Person besteht. Wir wollen der Bequemlichkeit halber diese Paare als Ehepaare ansehen, und die $x$jährigen als die Männer, die $u$jährigen als die Frauen. Es kann aber auch jedes andere Paar darunter gedacht werden, z. B. Vater und Sohn, oder Vater und Tochter, oder Mutter und Sohn, und Mutter und Tochter, etc. — Von den $l_x . l_u$ Männern sterben in einem Jahre $t_{x+1} . l_u$, weil von je l_x $x$jährigen Personen t_{x+1} sterben, ebenso sterben von den $l_x . l_u$ Frauen $l_x . t_{u+1}$, so daſs im Ganzen in dem ersten Jahre sterben $t_{x+1} . l_u + l_x . t_{u+1}$. Diese Anzahl ist nicht identisch mit der Anzahl der aufgelösten Paare; sie wäre es, wenn kein Paar völlig ausgestorben wäre; aber von den den $t_{x+1} . l_u$ sterbenden Männern zugehörigen Frauen sterben ebenfalls einige. Die Anzahl dieser ist, da von je l_u Frauen t_{x+1} sterben, $t_{x+1} . t_{u+1}$. Es sind also $t_{x+1} . t_{u+1}$ Paare gänzlich ausgestorben, und da diese in der Anzahl $t_{x+1} . l_u + l_x . t_{x+1}$ doppelt gezählt sind, so erhält man als Zahl der aufgelösten Paare $t_{x+1} . l_u + l_x . t_{u+1} - t_{x+1} . t_{u+1}$. Vollständige Paare existiren somit nach einem Jahre noch

$$\begin{aligned}
&l_x . l_u - t_{x+1} . l_u - l_x . t_{u+1} + t_{x+1} . t_{u+1} \\
&= l_x . l_u - (l_x - l_{x+1}) . l_u - l_x (l_u - l_{u+1}) + (l_x - l_{x+1})(l_u - l_{u+1}) \\
&= l_x . l_u - l_x . l_u + l_{x+1} . l_u - l_x . l_u + l_x . l_{u+1} \\
&\qquad + l_x . l_u - l_x . l_{u+1} - l_{x+1} . l_u + l_{x+1} . l_{u+1} \\
&\qquad = l_{x+1} . l_{x+1}
\end{aligned}$$

Von den den im ersten Jahre sterbenden $t_{x+1} . l_u$ Männern zugehörigen Frauen leben am Ende des Jahres noch $t_{x+1} . l_u - t_{x+1} . t_{u+1} = t_{x+1}(l_u - t_{u+1}) = t_{x+1}(l_u - l_u + l_{u+1})$ $= t_{x+1} . l_{u+1}$. Dies ist die Anzahl der nach einem Jahre lebenden Wittwen, ebenso findet man $l_{x+1} . t_{u+1}$ als die Anzahl der nach einem Jahre lebenden Wittwer.

Setzt man diese Entwickelungen ganz ebenso weiter fort, so findet man: Nach zwei Jahren bestehen noch $l_{x+2} . l_{u+2}$ vollständige Paare, im zweiten Jahre entstehen $l_{x+2} . t_{u+2}$ neue Wittwer und $t_{x+2} . l_{u+2}$ neue Wittwen, während in diesem Jahre völlig aussterben $t_{x+2} . t_{u+2}$ Paare. Von den $l_{x+1} . t_{u+1}$ Wittwern des ersten Jahres leben noch $l_{x+2} . t_{u+1}$, weil von je l_{x+1} $(x + 1)$ jährigen Personen nach einem Jahre noch l_{x+2} leben. Im Ganzen leben also nach zwei Jahren noch $l_{x+2} . t_{u+1} + l_{x+2} . t_{u+2}$ Wittwer d. h. $l_{x+2}(t_{u+1} + t_{u+2})$

$$= l_{x+2}(l_u - l_{u+2}).$$

Ebenso findet man, daſs nach zwei Jahren im Ganzen $(l_x - l_{x+2})\, l_{u+2}$ Wittwen existiren. Nach n Jahren existiren noch $l_{x+n} . l_{u+n}$ vollständige Paare und $l_{x+n}(l_u - l_{u+n})$ Wittwer und $l_{u+n}(l_x - l_{x+n})$ Wittwen, wovon $l_{x+n} . t_{u+n}$ Wittwer und $t_{x+n} . l_{u+n}$ Wittwen aus dem letzten Jahre stammen, während in diesem Jahre $t_{x+n} . t_{u+n}$ Paare völlig aussterben.

§. 29. Von $l_x \,.\, l_u$ Paaren aus $x$jährigen Männern und $u$jährigen Frauen bestehend, bezieht jedes eine mit dem jährlichen Betrage 1 pränumerando zahlbare Rente (Verbindungsrente) so lange, wie das Paar vollständig ist. Welches ist der Werth einer solchen Verbindungsrente?

Die erste Zahlung an sämmtliche Paare beträgt $l_x \,.\, l_u$. Nach einem Jahre existiren noch $l_{x+1} \,.\, l_{u+1}$ vollständige Paare, diese erhalten die Summe $l_{x+1} \,.\, l_{u+1}$, deren jetziger Werth $\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p}$ ist. Ebenso ist der Werth der Zahlung nach zwei Jahren $\frac{l_{x+2} \,.\, l_{x+2}}{p^2}$ etc. Bildet man die Summe aus diesen Werthen bis zum höchsten Alter, und dividirt dann mit $l_x \,.\, l_u$, so hat man den Werth der Rente für ein einzelnes Paar. Bezeichnet man denselben durch $R_{(x,\,u)}$, so ist

$$R_{(x,\,u)} = \frac{l_x \,.\, l_u + \frac{1}{p}\, l_{x+1} \,.\, l_{u+1} + \frac{1}{p^2} \,.\, l_{x+2} \,.\, l_{u+2} + \ldots\ldots}{l_x \,.\, l_u} \tag{62}$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner der rechten Seite entweder durch p^x oder durch p^u, so erhält man folgende Formeln:

$$R_{(x,\,u)} = \frac{\lambda_x \,.\, l_u + \lambda_{x+1} \,.\, l_{u+1} + \lambda_{x+2} \,.\, l_{u+2} + \ldots\ldots}{\lambda_x \,.\, l_u} \tag{62 a}$$

$$R_{(x,\,u)} = \frac{l_x \,.\, \lambda_u + l_{x+1} \,.\, \lambda_{u+1} + l_{x+2} \,.\, \lambda_{u+2} + \ldots\ldots}{l_x \,.\, \lambda_u} \tag{62 b}$$

Bezeichnet man die Zähler der rechten Seiten zur Abkürzung resp. mit $\Sigma(\lambda_x \,.\, l_u)$ und $\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u)$, so ist

$$R_{(x,\,u)} = \frac{\Sigma(\lambda_x \,.\, l_u)}{\lambda_x \,.\, l_u} \tag{62 c}$$

und

$$R_{(x,\,u)} = \frac{\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u)}{l_x \,.\, \lambda_u}. \tag{62 d}$$

Anmerkung 1. Bei der Berechnung des Werthes einer Verbindungsrente hat man also die Producte aus den Zahlen der Lebenden des einen und aus den discontirten Zahlen der Lebenden des andern Alters nöthig. Man mufs bei der Rechnung entweder immer für das niedere, oder immer für das höhere Alter die discontirten Zahlen nehmen, und man thut gut, um nicht in Fehler zu gerathen, ein für alle mal festzusetzen, für welches Alter die discontirten Zahlen zu nehmen sind. Wählt man hierzu das höhere Alter, so hat man den Vortheil der kleineren Zahlen. Wir wollen die Producte aus den Zahlen der Lebenden für zwei Alter die Zahl der Paare für diese beiden Alter nennen, und dies Product aus der Zahl der Lebenden des jüngeren Alters und der discontirten Zahl der Lebenden des höheren Alters die discontirte Zahl der Paare. Zur Berechnung der Rentenwerthe construirt man sich ähnliche Tabellen, wie zur Berechnung der Rentenwerthe für einzelne Leben, nur dafs man hier für jede mögliche Differenz zwischen den beiden Altern eine besondere Tabelle construiren mufs. Die erste Columne wird hier die beiden zusammengehörigen Alter enthalten, die zweite die Zahl der Lebenden des einen (niedrigeren) Alters, die dritte die discontirten Zahlen der Lebenden des anderen Alters, die vierte die Producte aus den entsprechenden Zahlen der beiden vorhergehenden Columnen, d. h. die discontirten Zahlen der Paare, und endlich wird die fünfte Columne die Summe der Zahlen der vierten Columne von den höchsten Altern an enthalten. Für die Tabelle der 17 englischen Gesellschaften hat man z. B. für die Altersdifferenz 3, wenn zu 3½ % gerechnet wird.

Alter in Jahren $y \ , \ y+3$	Zahl der Lebenden l_y	Discontirte Zahlen der Lebenden λ_{y+3}	Discontirte Zahlen der Paare $l_y \cdot \lambda_{y+3}$	Summen der discontirten Zahlen der Paare von oben an $\Sigma(l_y \cdot \lambda_{y+3})$
96 , 99	37	0.033	1.221	1.221
95 , 98	89	0.137	12.193	13.414
94 , 97	184	0.462	85.008	98.422
93 , 96	339	1.361	461.379	559.801
92 , 95	570	3.389	1931.730	2491.531
91 , 94	892	7.251	6467.892	8959.423
90 , 93	1319	13.280	18239.132	27198.555
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Diese Tabelle hat man fortzusetzen bis zu den niedrigsten Altern. Hiernach ist z. B.

$$R_{(91,\,94)} = \frac{8959.423}{6467.892} = 1.385,$$

Wie man diese Tabellen einzurichten hat, wenn man mit Logarithmen rechnet, liegt auf der Hand.

Anmerkung 2. Die postnumerando zahlbare Verbindungsrente $r_{(x,\,u)}$ ist ebenso; wie die Leibrente, um 1 kleiner als die entsprechende pränumerando zahlbare Rente, weil die erste Zahlung in dem Betrage von 1 wegfällt. Es ist also, wenn auch hier die postnumerando zahlbare Rente durch r bezeichnet wird,

$$r_{(x,\,u)} = R_{(x,\,u)} - 1 \tag{63}$$

oder

$$R_{(x,\,u)} = 1 + r_{(x,\,u)} \tag{63 a}$$

Anmerkung 3. Ist diese Rente halbjährlich in dem halben Betrage jedesmal, oder vierteljährlich in dem vierten Theil des Betrages jedesmal etc. zahlbar, so erhält man annäherungsweise richtig den Werth einer solchen Verbindungsrente ganz ebenso, als wenn es eine Leibrente wäre, also nach den in §. 7 bis 9 aufgestellten Sätzen. Die genaueren Formeln findet man durch ähnliche Entwickelungen wie in §. 7 bis 9.

§. 30. Von den aufgeschobenen Verbindungsrenten. Bedeutet ${}_{y}R_{(x,\,u)}$ den Werth einer Verbindungsrente für ein Paar, wo die eine Person $x$jährig, die andere $u$jährig ist, die aber erst nach y Jahren zu laufen beginnt, falls alsdann noch das Paar vollständig ist, und so lange läuft, wie das Paar vollständig ist — so ist, da bei $l_x \,.\, l_u$ solcher Renten $l_{x+y} \,.\, l_{u+y}$ Paare die erste Zahlung nach y Jahren, $l_{x+y+1} \,.\, l_{u+y+1}$ Paare die zweite Zahlung nach $y+1$ Jahren etc. erhalten, und die Summe der jetzigen Werthe aller dieser Zahlungen durch $l_x \,.\, l_u$ dividirt, den Werth der einzelnen Rente giebt,

$${}_{y}R_{(x,\,u)} = \frac{\dfrac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{p^y} + \dfrac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \dfrac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots}{l_x \cdot l_u} \tag{64}$$

oder indem man Zähler und Nenner der rechten Seite mit p^x oder p^u dividirt,

$${}_{y}R_{(x,\,u)} = \frac{\lambda_{x+y} \cdot l_{u+y} + \lambda_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1} + \lambda_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2} + \ldots\ldots}{\lambda_x \cdot l_u}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y} + l_{x+y+1} \cdot \lambda_{u+y+1} + l_{x+y+2} \cdot \lambda_{u+y+2} + \ldots\ldots}{l_x \cdot \lambda_u}$$

oder

$${}_{y}R_{(x,\,u)} = \frac{\Sigma(\lambda_{x+y} \cdot l_{u+y})}{\lambda_u \cdot l_u} \tag{64 a}$$

und
$$\underset{y}{R}_{(x,u)} = \frac{\Sigma(l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y})}{l_x \,.\, \lambda_u} \tag{64b}$$

Multiplicirt man ferner die rechten Seiten dieser Formeln resp. mit $\frac{\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y}}{\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y}}$ und $\frac{l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}}{l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}}$, so ist
$$\underset{y}{R}_{(x,u)} = \frac{\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y}}{\lambda_x \,.\, l_u} \,.\, \frac{\Sigma(\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y})}{\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y}}$$
oder
$$\underset{y}{R}_{(x,u)} = \frac{l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}}{l_x \,.\, \lambda_u} \,.\, \frac{\Sigma(l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y})}{l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}},$$
woraus sich mit Hülfe von Formel (62c) ergiebt
$$\underset{y}{R}_{(x,u)} = \frac{\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y}}{\lambda_x \,.\, l_u} \,.\, R_{(x+y,\, u+y)}, \text{ und} \tag{64c}$$
$$\underset{y}{R}_{(x,u)} = \frac{l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}}{l_x \,.\, \lambda_u} \,.\, R_{(x+y,\, u+y)} \tag{64d}$$

Den Werth der um y Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente berechnet man also ganz ähnlich wie den Werth der aufgeschobenen Leibrente, indem man nämlich die Summe der discontirten Zahlen der Paare für die um y Jahre höheren Alter dividirt durch die discontirte Zahl der Paare des gegenwärtigen Alters — oder indem man den Werth der Verbindungsrente für die um y Jahre höheren Alter multiplicirt mit der discontirten Zahl der Paare der um y Jahre höheren Alter und dividirt mit der discontirten Zahl der Paare der jetzigen Alter.

§. 31. **Aufhörende oder temporäre Verbindungsrente.** Die Verbindungsrente soll nur innerhalb der ersten z Jahre gezahlt werden, resp. nur bis zur Auflösung des Paares, falls dieselbe innerhalb der z Jahre erfolgt.

$R^z_{(x,u)}$ bezeichne den Werth einer solchen Rente. Offenbar ist hier, wie bei den Renten auf einzelne Leben:
$$R^z_{(x,u)} = R_{(x,u)} - \underset{z}{R}_{(x,u)} \tag{65}$$
$$= \frac{\Sigma(\lambda_x \,.\, l_u)}{\lambda_x \,.\, l_u} - \frac{\Sigma(\lambda_{x+y} \,,\, l_{x+y})}{\lambda_x \,.\, l_u}, \text{ oder}$$
$$R^z_{(x,u)} = \frac{\Sigma(\lambda_x \,.\, l_u) - \Sigma(\lambda_{x+y} \,.\, l_{u+y})}{\lambda_x \,.\, l_u}, \tag{65a}$$
in welcher Formel man auch λ mit l vertauschen kann.

§. 32. **Aufgeschobene aufhörende Verbindungsrente.** Bezeichnen wir eine nach y Jahren beginnende und von jetzt ab gerechnet nach z Jahren aufhörende Verbindungsrente für eine $x$jährige und eine $u$jährige Person mit $\underset{y}{R}^z_{(x,u)}$, so ist dem Früheren analog
$$\underset{y}{R}^z_{(x,u)} = \underset{y}{R}_{(x,u)} - \underset{z}{R}_{(x,u)} \tag{66}$$
$$= \frac{\Sigma(l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y})}{l_x \,.\, \lambda_u} - \frac{\Sigma(l_{x+z} \,.\, \lambda_{u+z})}{l_x \,.\, \lambda_u}$$
$$\underset{y}{R}^z_{(x,u)} = \frac{\Sigma(l_{x+y} \,.\, \lambda_{u+y}) - \Sigma(l_{x+z} \,.\, \lambda_{u+z})}{l_x \,.\, \lambda_u} \tag{66a}$$
in welcher Formel wieder l und λ vertauscht werden können.

§. 33. Soll die Verbindungsrente für ein aus einer $x$jährigen und einer $u$jährigen Person bestehendes Paar nicht erlöschen beim Tode des Zuerststerbenden, sondern erst beim Tode des Zuletztsterbenden der beiden Personen, so kann man diese Rente so ansehen, als ob jede einzelne Person eine Leibrente für sich hätte und diese beiden Renten hätten den Werth $R_x + R_u$. Hierbei würde aber, so lange beide Personen leben, jährlich die Summe 2 gezahlt werden; es mufs also von dem obigen Werthe noch subtrahirt werden der Werth einer Rente mit dem jährlichen Betrage 1, die so lange läuft, wie die Verbindung der beiden Personen besteht. Der Werth dieser Rente ist aber nach dem obigen $R_{(x,u)}$. Mithin finden wir als Werth der gesuchten Rente, die bezeichnet sein mag durch $R^{t''}{}_{(x,u)}$

$$R^{t''}{}_{(x,u)} = R_x + R_u - R_{(x,u)} \tag{67}$$

Der Werth einer sofort beginnenden Rente für 2 Personen, zahlbar bis zum Tode der Zuletztsterbenden von diesen beiden Personen, ist somit gleich der Summe der Leibrenten der einzelnen Personen, vermindert um den Werth der Verbindungsrente.

Anmerkung. Sind beide Personen gleich alt, so ist

$$R^{t''}{}_{(x,x)} = 2 \,.\, R_x - R_{(x,x)}$$

§. 34. Soll eine Rente, die bis zum Tode des Zuletztsterbenden läuft, in dem Betrage 1 gezahlt werden, so lange das Paar vollständig ist, vom Tode des Zuerststerbenden ab aber in dem jährlichen Betrage $\frac{1}{2}$, so hat eine solche Rente denselben Werth wie die beiden einzelnen Leibrenten, jede mit dem jährlichen Betrage $\frac{1}{2}$. So lange beide Personen leben, wird dann jährlich $2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$ gezahlt, und nach dem Tode der einen Person nur noch $\frac{1}{2}$. Der Werth dieser Rente, bezeichnet durch ${}^{>}R^{t''}{}_{(x,u)}$, ist also

$$ {}^{>}R^{t''}{}_{(x,u)} = \frac{R_x + R_u}{2} \tag{68}$$

Anmerkung. Sind beide Personen gleich alt, so ist

$$ {}^{>}R^{t''}{}_{(x,x)} = R_x.$$

§. 35. Soll eine solche Rente, die bis zum Tode des Zuletztsterbenden läuft, nach y Jahren beginnen, so nimmt man einfach überall statt der sofort beginnenden Renten die aufgeschobenen, also

$$\underset{y}{R}{}^{t''}{}_{(x,u)} = \underset{y}{R}{}_x + \underset{y}{R}{}_u - \underset{y}{R}{}_{(x,u)} \tag{69}$$

und soll solche Rente durch jährliche Prämien während der y Jahre erworben werden, so hat man, um diese Prämie zu finden, zu dividiren durch die nach y Jahren resp. mit dem Tode des Zuletztsterbenden aufhörende Verbindungsrente, also durch $R^{y,t''}{}_{(x,u)} = R^y_x + R^y_u - R^y{}_{(x,u)}$. Soll dagegen die Prämie während der y Jahre, resp. nur bis zum Tode des Zuerststerbenden gezahlt werden, so hat man den Werth der Rente $\underset{y}{R}{}^{t''}{}_{(x,u)}$ zu dividiren durch $R^y{}_{(x,u)}$.

§. 36. Soll eine Rente für zwei verbundene Leben erst zu laufen beginnen mit dem Tode des Zuerststerbenden und aufhören mit dem Tode des Ueberlebenden, so ist der Werth dieser Rente, dargestellt durch $R^{t''}_{t',(x,u)}$,

$$R^{t''}_{t'(x,u)} = R^{t''}_{(x,u)} - R_{(x,u)} \tag{70}$$

denn von dem Werthe der bis zum Tode des Zuletztsterbenden laufenden Rente ist

abzuziehen der Werth der Zahlungen bis zum Tode des Zuerststerbenden, und dieser letztere Werth ist offenbar der Werth der Verbindungsrente, also $R_{(x,u)}$. Nun war

$$R^{t''}_{(x,u)} = R_x + R_u - R_{(x,u)},$$

oder

$$R^{t''}_{t'(x,u)} = R_x + R_u - 2R_{(x,u)}. \tag{70a}$$

Der Werth einer Rente für 2 Personen, die mit dem Tode der zuerststerbenden beginnt und dann so lange läuft, wie die überlebende Person am Leben ist, ist gleich der Summe aus den Werthen der Leibrenten für die einzelnen Leben, vermindert um den doppelten Werth der Verbindungsrente.

Die jährliche Prämie für die Erwerbung einer solchen Rente findet man, wenn man $R^{t''}_{t'(x,u)}$ durch $R_{(x,u)}$ dividirt, denn der Werth der jährlichen Prämienzahlung, wenn dieselbe dauert, so lange das Paar vollständig existirt, ist gleich der jährlichen Prämie, multiplicirt mit $R_{(x,u)}$. Bezeichnet man die Prämie mit $P[R^{t''}_{t'(x,u)}]$, so ist

$$P[R^{t''}_{t'(x,u)}] \,.\, R_{(x,u)} = R_x + R_u - 2R_{(x,u)}$$

und

$$P[R^{t''}_{t'(x,u)}] = \frac{R_x + R_u - 2R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}} \tag{71}$$

oder

$$P[R^{t''}_{t'(x,u)}] = \frac{R_x + R_u}{R_{(x,u)}} - 2 \tag{71a}$$

Die jährliche Prämie für die Versicherung dieser Rente ist somit gleich dem um 2 verminderten Quotienten aus der Summe der beiden einzelnen Leibrentenwerthe durch den Werth der Verbindungsrente.

Anmerkung. Sind die beiden Personen des Paares gleich alt, so ist

$$R^{t''}_{t'(x,x)} = 2\,[R_x - R_{(x,x)}]$$

und

$$P[R^{t''}_{t'(x,x)}] = 2\left\{\frac{R_x}{R_{(x,x)}} - 1\right\}.$$

§. 37. Ueberlebensrente (Wittwen- oder Waisen-Pension). Soll die Rente vom Tode des Zuerststerbenden bis zum Tode des Ueberlebenden nur dann zur Auszahlung kommen, wenn der Zuerststerbende die im Voraus bestimmte Person (der Versorger) ist, so ist der Werth einer solchen Rente gleich dem Werth der Leibrente der zu versorgenden Person, vermindert um die Verbindungsrente; also wenn $R_{tx(u)}$ den Werth dieser Rente bezeichnet, so ist

$$R_{tx(u)} = R_u - R_{(x,u)}. \tag{72}$$

Die jährliche Prämie für solche Ueberlebensrente findet man, da sie so lange gezahlt wird, als die Verbindung der beiden Paare besteht, indem man den Werth der Ueberlebensrente dividirt durch den Werth der Verbindungsrente, und somit ist, wenn $P[R_{tx(u)}]$ diese Prämie bedeutet:

$$P[R_{tx(u)}] = \frac{R_u - R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}} \tag{73}$$

oder

$$P[R_{tx(u)}] = \frac{R_u}{R_{(x,u)}} - 1. \tag{73a}$$

Die jährliche Prämie für die Ueberlebensrente ist somit gleich dem um 1 verminderten Quotienten aus der Leibrente für die zu versorgende Person durch die Verbindungsrente.

Anmerkung. Es ist
$$R_{t\,x\,(u)} = R_u - R_{(x,\,u)}$$
$$R_{t\,u\,(x)} = R_x - R_{(x,\,u)}$$
Addirt man beide Gleichungen, so ist
$$R_{t\,x\,(u)} + R_{t\,u\,(x)} = R_x + R_u - 2\,R_{(x,\,u)}$$
Vergleicht man die rechte Seite dieser Gleichung mit Formel (70a), so findet man
$$R_{t\,x\,(u)} + R_{t\,u\,(x)} = R^{t''}_{t'\,(x,\,u)} \tag{74}$$
Zwischen den entsprechenden jährlichen Prämien besteht dieselbe Beziehung.

§. 38. Ueberlebensrente mit Rückgewähr.

I. $\underset{tx}{R}_{r\,(u)}$ möge den Werth einer Ueberlebensrente bedeuten, welcher noch die Bedingung zugefügt ist, dafs wenn die zu versorgende Person vor dem Versorger stirbt, die eingezahlte Summe $\underset{tx}{R}_{r\,(u)}$ wieder zurückgezahlt wird, aber ohne Zinsen. Bei $l_x\,.\,l_u$ solcher Ueberlebensrenten sterben im ersten Jahre $t_{u+1}\,.\,l_x$ von den zu versorgenden Personen, für $t_{x+1}\,.\,t_{u+1}$ von diesen sterben die Versorger in demselben Jahre. Nehmen wir an, dafs wenn Versorger und zu versorgende Person in einem Jahre stirbt, dafs dann ebenso oft der Versorger zuerst stirbt, wie die zu versorgende Person, so sterben also im ersten Jahre
$$l_x\,.\,t_{u+1} - \tfrac{1}{2}\,.\,t_{x+1}\,.\,t_{u+1}$$
zu versorgende Personen, während bei ihrem Tode die Versorger noch leben. Diese Anzahl kann auch geschrieben werden $(l_x - \frac{1}{2}\,t_{x+1})\,t_{u+1} = \frac{1}{2}\,(l_x + l_{x+1})\,(l_u - l_{u+1})$
$$= \tfrac{1}{2}\,(l_x\,.\,l_u - l_{x+1}\,.\,l_{u+1} + l_{x+1}\,.\,l_u - l_x\,.\,l_{u+1})$$
Multiplicirt man diese Anzahl mit $\underset{tr}{R}_{r\,(u)}$ und dividirt durch p, so ist dies die Rückgewähr nach 1 Jahre. Ebenso findet man als Rückgewähr des zweiten Jahres, d. h. den jetzigen Werth derselben $\frac{1}{2}\,(l_{x+1}\,.\,l_{u+1} - l_{x+2}\,.\,l_{u+2} + l_{x+2}\,.\,l_{u+1} - l_{x+1}\,.\,l_{u+2})\,.\,\dfrac{\underset{tr}{R}_{r\,(u)}}{p^2}$.
Bildet man für alle folgenden Jahre ähnliche Ausdrücke, und dividirt die Summe derselben durch $l_x\,.\,l_u$, so hat man den Werth der Rückgewähr für die einzelne Versicherung, und dieser ist
$$\underset{tx}{R}_{r\,(x)}\,.\,\frac{1}{2\,l_x\,.\,l_u}\left\{\begin{aligned}&\frac{l_x\,.\,l_u}{p} - \frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+1}\,.\,l_u}{p} - \frac{l_x\,.\,l_{u+1}}{p}\\ &+\frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+1}}{p^2} - \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+1}}{p^2} - \frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+2}}{p^2}\\ &+\frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+2}}{p^3} - \frac{l_{x+3}\,.\,l_{u+3}}{p^3} + \frac{l_{x+3}\,.\,l_{u+2}}{p^3} - \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$
Vereinigen wir die unter einander stehenden Ausdrücke, so gestaltet sich die Rückgewähr so:
$$\frac{\underset{tx}{R}_{r\,(u)}}{2}\left[\begin{aligned}&\frac{1}{p}\,.\,\frac{1}{l_x\,.\,l_u}\left(l_x\,.\,l_u + \frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right)\\ &-\frac{1}{l_x\,.\,l_u}\left(\frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+3}\,.\,l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\right)\\ &+\frac{1}{p}\,.\,\frac{1}{l_x\,.\,l_u}\left(l_{x+1}\,.\,l_u + \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+3}\,.\,l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right)\\ &-\frac{1}{p}\,.\,\frac{1}{l_x\,.\,l_n}\left(l_x\,.\,l_{u+1} + \frac{l_{x+1}\,.\,l_{u+2}}{p} + \frac{l_{x+2}\,.\,l_{u+3}}{p^2} + \ldots\ldots\right)\end{aligned}\right]$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich, wenn man innerhalb der zweiten kleinen Klammer $l_x . l_x - l_x . l_u$ hinzufügt, dagegen das dritte Glied mit $\frac{l_{x+1}}{l_{x+1}}$ und das vierte Glied mit $\frac{l_{u+1}}{l_{u+1}}$ multiplicirt in

$$\frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{2}\left[\frac{R_{(x,u)}}{p} - R_{(x,u)} + 1 + \frac{l_{x+1}}{p . l_x} . R_{(x+1,u)} - \frac{l_{u+1}}{p . l_u} R_{(u+1,x)}\right]$$

Ferner ist $\frac{l_{x+1}}{p . l_x} = \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}$ etc., mithin hat man als Werth der Rückgewähr

$$\frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{2}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} R_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}\right\}$$

Addirt man zu diesem Werth der Rückgewähr noch $R_u - R_{(x,u)}$ als Werth der Rentenzahlung, so müssen beide Werthe zusammen $\underset{tx}{R}_{r(u)}$ ausmachen, und somit ist

$$\underset{tx}{R}_{r(u)} = \frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{2}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} . R_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}\right\} + R_x - R_{(x,u)}$$

und

$$\underset{tx}{R}_{r(u)} = \frac{R_x - R_{(x,u)}}{1 - \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} R_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}\right\}}$$

oder

$$\underset{tx}{R}_{r(u)} = \frac{R_x - R_{(x,u)}}{\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} R_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}\right\}} \tag{75a}$$

II. $Pr\,(R_{tx(u)})$ bedeute die jährliche Prämie für eine Ueberlebensrente, beginnend mit dem Tode des beim Abschlufs der Versicherung x Jahre alten Versorgers und laufend bis zum Tode der zu versorgenden beim Abschlufs der Versicherung u Jahre alten Person, mit der Nebenbedingung, dafs wenn die zu versorgende Person vor dem Versorger sterbe, die gezahlten Prämien ohne Zinsen zurückgegeben werden.

Bei $l_x . l_u$ solcher Versicherungen hat hier die Rückgewähr mit der im ersten Theil dieses Paragraphen entwickelten Rückgewähr das Gemeinschaftliche, dafs für jedes Jahr dieselbe Anzahl Versorger wie dort die Rückgewähr erhält, nur dafs im ersten Jahre an jeden $1\,Pr$, im zweiten Jahre $2\,Pr$, im dritten Jahre $3\,Pr$ etc. zurückgezahlt wird. Mithin wird hier die Gesammtrückgewähr ausgedrückt durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2p}(l_x + l_{x+1})(l_u - l_{u+1}) \;.\; Pr\,[R_{tx(u)}] \\
&+ \frac{1}{2p^2}(l_{x+1} + l_{x+2})(l_{u+1} - l_{u+2}) . 2\,Pr\,[R_{tx(u)}] \\
&+ \frac{1}{2p^3}(l_{x+2} + l_{x+3})(l_{u+2} - l_{u+3}) . 3\,Pr\,[R_{tx(u)}] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dividirt man diese Summe durch $l_x . l_u$, so erhält man den Werth der Rückgewähr für die einzelne Versicherung und dieser ist

$$\frac{Pr\,[R_{tx\,(u)}]}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big[\frac{1}{p}\,(l_x \,.\, l_u - l_{x+1} \,.\, l_{u+1} + l_{x+1} \,.\, l_u - l_x \,.\, l_{u+1})$$

$$+ \frac{2}{p^2}\,(l_{x+1} \,.\, l_{u+1} - l_{x+2} \,.\, l_{u+2} + l_{x+2} \,.\, l_{u+1} - l_{x+1} \,.\, l_{u+2})$$

$$+ \frac{3}{p^3}\,(l_{x+2} \,.\, l_{u+2} - l_{x+3} \,.\, l_{u+3} + l_{x+3} \,.\, l_{u+2} - l_{x+2} \,.\, l_{u+3})$$

$$+ \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big]$$

oder anders geordnet

$$\frac{Pr\,[R_{tx\,(u)}]}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big[\frac{l_x \,.\, l_u}{p} + 2\,\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p^2} + 3\,\frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^3} + \ldots\ldots$$

$$-\Big(\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + 2\,\frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + 3\,\frac{l_{x+3} \,.\, l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\Big)$$

$$+ \frac{l_{x+1} \,.\, l_u}{p} + 2\,\frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+1}}{p^2} + 3\,\frac{l_{x+3} \,.\, l_{u+2}}{p^3} + \ldots\ldots$$

$$+\Big(\frac{l_x \,.\, l_{u+1}}{p} + 2\,\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+2}}{p^3} + 3\,\frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\Big)\Big]$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$V_{(x,u)} = \frac{1}{l_x \,.\, l_u}\Big\{l_x \,.\, l_u + 2\,\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + 3\,\frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\Big\}$$

$$= \frac{1}{l_x \,.\, \lambda_u}\Big\{l_x \,.\, \lambda_u + 2\,l_{x+1} \,.\, \lambda_{u+1} + 3\,l_{x+2} \,.\, \lambda_{u+2} + \ldots\ldots\Big\}$$

$$= \frac{1}{\lambda_x \,.\, l_u}\Big\{\lambda_x \,.\, l_u + 2\,\lambda_{x+1} \,.\, l_{u+1} + 3\,\lambda_{x+2} \,.\, l_{u+2} + \ldots\ldots\Big\}$$

so erhält die Rückgewähr die Form, wenn man zugleich in der zweiten Reihe hinzufügt

$$l_x \,.\, l_u + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots - l_x \,.\, l_u - \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} - \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots$$

und in der dritten Reihe multiplicirt mit $\frac{l_{x+1}}{l_{x+1}}$ und in der vierten Reihe mit $\frac{l_{u+1}}{l_{u+1}}$.

$$\frac{Pr\,[R_{tx\,(u)}]}{2}\Big\{\frac{V_{(x,u)}}{p} - V_{(x,u)} + R_{(x,u)} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\,\frac{V_{(x+1,u)}}{p} - \frac{l_{u+1}}{l_u}\,\frac{V_{(x,u+1)}}{p}\Big\}$$

$$= \frac{Pr\,[R_{tx\,(u)}]}{2}\Big\{R_{(x,u)} - \frac{p-1}{p}\,V_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,V_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,V_{(x,u+1)}\Big\}$$

Setzt man den Werth der Prämienzahlung, der hier ausgedrückt wird durch $R_{(x,u)} \,.\, Pr\,[R_{tx\,(u)}]$, dem Werth der Rückgewähr und dem Werth der Ueberlebensrente gleich, so ist

$$R_{(x,u)} \,.\, Pr\,[R_{tx\,(u)}] = R_u - R_{(x,u)}$$

$$+ \frac{Pr\,[R_{tx\,(u)}]}{2}\Big\{R_{(x,u)} - \frac{p-1}{p}\,V_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,V_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_\psi} \,.\, V_{(x,u+1)}\Big\}$$

und hieraus folgt

$$Pr\,[R_{tx\,(u)}] = \frac{R_x - R_{(x,u)}}{R_{(x,u)} - \frac{1}{2}\Big\{R_{(x,u)} - \frac{p-1}{p}\,V_{(x,u)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,V_{(x+1,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,V_{(x,u+1)}\Big\}} \qquad (76)$$

oder

$$Pr\,[R_{tx\,(u)}] = \frac{R_x - R_{(x,u)}}{\frac{1}{2}\left\{R_{(x,u)} + \frac{p-1}{p}\,V_{(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,V_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,V_{(x,u+1)}\right\}} \tag{76a}$$

Anmerkung. Der Ausdruck $V_{(x,u)}$ stellt eine Verbindungsrente mit wachsendem Betrage dar, so daſs im ersten Jahre 1, im zweiten Jahre 2, im dritten Jahre 3 etc. gezahlt wird. Er läſst sich auch auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} V_{(x,u)} = \frac{1}{l_x \cdot \lambda_u} (l_x \cdot \lambda_u &+ l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1} + l_{x+2} \cdot \lambda_{u+2} + l_{x+3} \cdot \lambda_{u+3} + \ldots\ldots \\ &+ l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1} + l_{x+2} \cdot \lambda_{u+2} + l_{x+3} \cdot \lambda_{u+3} + \ldots\ldots \\ &\qquad + l_{x+2} \cdot \lambda_{x+3} + l_{x+3} \cdot \lambda_{u+3} + \ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots\ldots \\ = \frac{1}{l_x \cdot \lambda_u} [\Sigma(l_x \cdot \lambda_u) &+ \Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}) + \Sigma(l_{x+2} \cdot \lambda_{u+2}) + \ldots\ldots] \end{aligned}$$

in welcher Formel man auch l mit λ vertauschen kann. Aus der vorstehenden Formel erhellt, daſs man $V_{(x,u)}$ am leichtesten berechnet, wenn man die Summen aus den Producten der Zahlen der Lebenden und der discontirten Zahlen der Lebenden abermals von dem höchsten Alter an summirt, und dann durch $l_x \cdot \lambda_u$ dividirt.

§. 39. Aufgeschobene Wittwenpension. Die Wittwenpension soll zum ersten Male m Jahre nach dem Tode des Versorgers gezahlt werden (wobei das Sterbejahr des Versorgers nicht mitgezählt wird). Der Werth einer solchen Ueberlebensrente, der zugleich die einmalige Prämie ausdrückt, sei $\underset{m}{R}_{tx\,(u)}$. Die erste Zahlung der Rente findet bei $l_x \cdot l_u$ solcher Versicherungen nach $(m+1)$ Jahren an die aus dem ersten Jahre herrührenden Wittwen statt. Am Ende des ersten Jahres existiren $(l_x - l_{x+1})\,l_{u+1}$ Wittwen und von diesem leben m Jahre später noch $(l_x - l_{x+1})\,l_{u+m+1}$. Der Werth der nach $(m+1)$ Jahren zahlbaren Summe ist somit, da jede einzelne Wittwe die Summe 1 erhält,

$$(l_x - l_{x+1}) \cdot \frac{l_{u+m+1}}{p^{m+1}}.$$

Nach $(m+2)$ Jahren erhalten auch die aus dem zweiten Jahre herstammenden Wittwen die Auszahlung der Rente. Von den vorigen Rentenempfängerinnen leben noch $(l_x - l_{x+1})\,l_{u+m+2}$; der neuen Rentenempfängerinnen sind, da am Ende des zweiten Jahres $(l_{x+1} - l_{x+2})\,l_{u+2}$ neue Wittwen existiren $(l_{x+1} - l_{x+2})\,l_{u+m+2}$. Im Ganzen ist die Anzahl der nach $m+2$ Jahren die Rente empfangenden Personen

$$(l_x - l_{x+1})\,l_{u+m+2} + (l_{x+1} - l_{x+2})\,l_{u+m+2} = (l_x - l_{x+2})\,l_{u+m+2}$$

Der Werth der nach $(m+2)$ Jahren zur Auszahlung kommenden Summe ist somit

$$(l_x - l_{x+2}) \cdot \frac{l_{u+m+2}}{p^{m+2}}$$

Von diesen Rentenempfängerinnen leben ein Jahr später $(l_x - l_{x+2})\,l_{u+m+3}$, dazu kommen die aus dem dritten Jahre herrührenden Wittwen, und deren sind $(l_{x+2} - l_{x+3})\,l_{u+m+3}$. Im Ganzen empfangen also die Rente nach $m+3$ Jahren $(l_x - l_{x+2})\,l_{u+m+3} + (l_{x+2} - l_{x+3})\,l_{u+m+3} = (l_x - l_{x+3})\,l_{u+m+3}$ Personen und der Werth dieser Zahlung ist $(l_x - l_{x+3})\,\frac{l_{u+m+3}}{p^{m+3}}$. Bildet man die entsprechenden Ausdrücke für

die folgenden Jahre bis zu dem höchsten Alter der Sterblichkeits-Tabelle und addirt dieselben und dividirt durch $l_x . l_u$, so findet man

$$ {}_mR_{tx(u)} = \frac{1}{l_x . l_u}\left[(l_x - l_{x+1})\frac{l_{u+m+1}}{p^{m+1}} + (l_x - l_{x+2})\frac{l_{u+m+2}}{p^{m+2}} + (l_x - l_{x+3})\frac{l_{u+m+3}}{p^{m+3}} + \dots\dots\right] $$

$$ = \frac{1}{l_x . l_u}\left(\frac{l_x . l_{u+m+1}}{p^{m+1}} + \frac{l_x . l_{u+m+2}}{p^{m+2}} + \frac{l_x . l_{u+m+3}}{p^{m+3}} + \dots\dots\right) $$

$$ - \frac{1}{l_x . l_u}\left(\frac{l_{x+1} . l_{u+m+1}}{p^{m+1}} + \frac{l_{x+2} . l_{u+m+2}}{p^{m+2}} + \frac{l_{x+3} . l_{u+m+3}}{p^{m+3}} + \dots\dots\right) $$

Dividirt man mit p^u innerhalb der Klammern und die Nenner aufserhalb derselben, so wird

$$ {}_mR_{tx(u)} = \frac{\Sigma \lambda_{u+m+1}}{\lambda_u} - \frac{\Sigma l_{x+1} . \lambda_{u+m+1}}{l_x . \lambda_u}. $$

Fügt man auf der rechten Seite noch hinzu $\frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u} - \frac{l_x}{l_x} . \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u}$, so ist

$$ {}_mR_{tx(u)} = \frac{\Sigma \lambda_{u+m}}{\lambda_u} - \frac{\Sigma l_x . \lambda_{u+m}}{l_x . \lambda_u} $$

$$ = {}_mR_u - \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u} . \frac{\Sigma l_x . \lambda_{u+m}}{l_x . \lambda_{u+m}} $$

oder

$$ {}_mR_{tx(u)} = {}_mR_u - \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u} . R_{(x,u+m)} \tag{77} $$

$$ {}_mR_{tx(u)} = \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u}\left[R_{(u+m)} - R_{(x,u+m)}\right] \tag{77 a} $$

$$ = \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u} . R_{tx(u+m)} \tag{77 c} $$

§. 40. Die Wittwenpension soll mit dem Tode des Versorgers beginnen, wenn derselbe nicht innerhalb der ersten y Jahre stirbt; stirbt er aber innerhalb der ersten y Jahre, so soll doch die erste Pensionszahlung y Jahre nach Abschlufs der Versicherung stattfinden.

Bei $l_x . l_u$ solcher Versicherungen existiren nach y Jahren $(l_x - l_{x+y})\, l_{u+y}$ Wittwen, und die zu zahlende Summe hat den Werth $(l_x - l_{x+y})\, \frac{l_{u+y}}{p^y}$; ein Jahr später giebt es $(l_x - l_{x+y+1})\, l_{u+y+1}$ Wittwen, diese erhalten somit zusammen eine Summe, deren gegenwärtiger Werth $(l_x - l_{x+y+1})\, \frac{l_{u+y+1}}{p^{y+1}}$ ist, etc. Bildet man die Summe aller dieser Ausdrücke bis zum höchsten Alter, und dividirt man durch $l_x . l_u$, so erhält man den Werth einer solchen aufgeschobenen Wittwenpension, die hier bezeichnet sein mag durch ${}_yR_{tx(u)}$. Es ist also:

$$ {}_yR_{tx(u)} = \frac{\frac{(l_x - l_{x+y})\, l_{u+y}}{p^y} + \frac{(l_x - l_{x+y+1}) . l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \dots\dots}{l_x . l_u} $$

$$ = \left(l_x . \frac{l_{u+y}}{p^y} + l_x . \frac{l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \dots\dots\right)\frac{1}{l_x . l_u} $$

$$ - \left(l_{x+y} . \frac{l_{u+y}}{p^y} + l_{x+y+1} . \frac{l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \dots\dots\right)\frac{1}{l_x . l_u} $$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch p^u, so wird

$${}_yR_{tx\,(u)} = \frac{\lambda_{u+y} + \lambda_{u+y+1} + \dots\dots}{\lambda_u}$$

$$- \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y} + l_{x+y+1} \cdot \lambda_{x+y+1} + \dots\dots}{l_x \cdot \lambda_u}$$

$$= \frac{\Sigma \lambda_{u+y}}{\lambda_u} - \frac{\Sigma(l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y})}{l_x \cdot \lambda_u},$$

also
$${}_yR_{tx\,(u)} = \underset{y}{R}_u - \underset{y}{R}_{(x,u)} \tag{78}$$

und
$${}_yR_{tx\,(u)} = \frac{\lambda_{u+y}}{\lambda_u} \left\{ R_{(u+y)} - \frac{l_{x+y}}{l_x} R_{(x+y,\,u+y)} \right\} \tag{78 a}$$

§. 41. Soll die Wittwenpension zum ersten Mal nach $(y + 1)$ Jahren gezahlt werden, aber nur unter der Bedingung, daſs der Versorger innerhalb der ersten y Jahre nicht sterbe. Hier erhalten nach $(y + 1)$ Jahren nur die Wittwen aus dem letzten Jahre die Pension; die Anzahl dieser ist $(l_{x+y} - l_{x+y+1})\, l_{u+y+1}$, und der Werth der auszuzahlenden Summe ist $\frac{(l_{x+y} - l_{x+y+1})\, l_{u+y+1}}{p^{y+1}}$.

Nach $(y + 2)$ Jahren existiren, aus den beiden letzten Jahren herrührend, $(l_{x+y} - l_{x+y+2})\, l_{u+y+2}$ Wittwen und der Werth der Summe, welche dieselben erhalten, ist $(l_{x+y} - l_{x+y+2}) \frac{l_{u+y+2}}{p^{y+2}}$ etc. Bezeichnet hier den Werth dieser Rente $R_{ytx\,(u)}$

so ist
$$R_{ytx\,(u)} = \frac{1}{l_x \cdot l_u} \left\{ \frac{l_{x+y} - l_{x+y+1}}{p^{y+1}} \cdot l_{u+y+1} + \frac{l_{x+y} - l_{x+y+2}}{p^{y+2}} \cdot l_{u+y+2} + \dots\dots \right\}$$

$$= \frac{1}{l_x \cdot l_u} \left\{ \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \dots\dots \right\}$$

$$- \frac{1}{l_x \cdot l_u} \left\{ \frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \dots\dots \right\}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch p^u, so entsteht

$$R_{ytx\,(u)} = \frac{l_{x+y}\,[\lambda_{u+y+1} + \lambda_{u+y+2} + \dots\dots]}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{l_{x+y+1} \cdot \lambda_{u+y+1} + l_{x+y+2} \cdot \lambda_{u+y+2} + \dots\dots}{l_x \cdot \lambda_u}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \Sigma \lambda_{u+y+1}}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{\Sigma(l_{x+y+1} \cdot \lambda_{u+y+1})}{l_x \cdot \lambda_u}$$

Fügt man auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung noch hinzu:

$$\frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_{x+y} \cdot \lambda_u} - \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u},$$

so wird
$$R_{ytx\,(u)} = \frac{l_{x+y} \cdot \Sigma \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{\Sigma l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u},$$

oder
$$R_{ytx\,(u)} = \frac{l_{x+y}}{l_x} \cdot \underset{y}{R}_u - \underset{y}{R}_{(x,u)} \tag{79}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} [R_{(u+y)} - R_{(x+y,\,u+y)}] \tag{79 a}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} R_{t\,x+y\,(u+y)} \tag{79 c}$$

§. 42. Soll die Ueberlebensrente eine aufhörende sein, wie dies bei Kinderversorgungen vorkommen kann (Erziehungsrente), so erhält man den Werth der Rente und die jährliche Prämie, indem man in den Formeln (72) und (73) die Werthe der aufhörenden Renten statt der dort stehenden nimmt.

§. 43. Soll die Ueberlebensrente, wenn sie wirklich zur Auszahlung kommt, höchstens m mal gezahlt werden, so ist der Werth dieser Rente offenbar die Differenz zwischen $R_{tx(u)}$ und $\underset{m}{R}_{tx(u)}$, und somit ist der gesuchte Werth, den wir bezeichnen wollen mit $R_{tx(u)}^{tx+m}$

$$R_{tx(u)}^{tx+m} = R_u - R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u}\left[R_{(u+m)} - R_{(x,u+m)}\right] \tag{80}$$

$$= R_{tx(u)} - \frac{\lambda_{u+m}}{\lambda_u} R_{tx(u+m)} \tag{80a}$$

Die jährliche Prämie erhält man offenbar durch Division mit $R_{(x,u)}$.

§. 44. Bei halbjährlicher, vierteljährlicher etc. Rentenzahlung verändert sich nicht der Werth der Rente, zahlbar vom Tode des Zuerststerbenden bis zum Tode des Zuletztsterbenden, und ebensowenig der Werth der Ueberlebensrente, denn die Veränderungen heben sich gegenseitig auf. Sonst mufs man, um die richtigen Werthe zu finden, die entsprechenden Werthe nach §. 7 bis 9 für die Renten einsetzen.

§. 45. In dem Vorstehenden ist vorausgesetzt, dafs die Anzahl der lebenden Männer und der lebenden Frauen aus derselben Sterblichkeits-Tabelle entnommen werden. Es ist dann

$$R_{(x,u)} = R_{(u,x)},$$

wenn der voranstehende Buchstabe im Index das Alter des Mannes angiebt. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man gesonderte Tabellen für Männer und Frauen hat, und man darf dann Vertauschungen, wie die obige, nicht vornehmen; auch gelten dann die in dem Vorstehenden aufgestellten Formeln über Verbindungsrenten etc. von gleichalten Personen nicht, da die Renten für dasselbe Alter, nach verschiedenen Sterblichkeits-Tafeln berechnet, verschieden ausfallen.

§. 46. Dem Obigen analog findet man den Werth einer Rente, die so lange läuft, als eine Verbindung von drei Personen, gegenwärtig im Alter von x, u, v Jahren, besteht, durch

$$R_{(x,u,v)} = \frac{l_x \,.\, l_u \,.\, l_v + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1} \,.\, l_{v+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2} \,.\, l_{v+2}}{p^2} + \ldots\ldots}{l_x \,.\, l_u \,.\, l_v} \tag{81}$$

oder dividirt man Zähler und Nenner der rechten Seite durch p^v, oder durch p^u, oder durch p^x:

$$R_{(x,u,v)} = \frac{l_x \,.\, l_u \,.\, \lambda_v + l_{x+1} \,.\, l_{u+1} \,.\, \lambda_{v+1} + l_{x+2} \,.\, l_{u+2} \,.\, \lambda_{v+2} + \ldots\ldots}{l_x \,.\, l_u \,.\, \lambda_v} \tag{81a}$$

$$= \frac{l_x \,.\, \lambda_u \,.\, l_v + l_{x+1} \,.\, \lambda_{u+1} \,.\, l_{v+1} + l_{x+2} \,.\, \lambda_{u+2} \,.\, l_{v+2} + \ldots\ldots}{l_x \,.\, \lambda_u \,.\, l_v} \tag{81b}$$

$$= \frac{\lambda_x \,.\, l_u \,.\, l_v + \lambda_{x+1} \,.\, l_{u+1} \,.\, l_{v+1} + \lambda_{x+2} \,.\, l_{u+2} \,.\, l_{v+2} + \ldots\ldots}{\lambda_x \,.\, l_u \,.\, l_v} \tag{81c}$$

Die Werthe der aufgeschobenen Renten, der anfhörenden und der aufgeschobenen und zugleich aufhörenden Renten findet man hier ganz ebenso wie früher.

§. 47. Bezieht eine Verbindung von drei Personen eine Rente, die noch nach dem Tode des Zuerststerbenden gezahlt wird, aber nur bis zum Tode des Zunächststerbenden, so findet man den Werth dieser Rente, bezeichnet durch $R^{t''}_{(x,u,v)}$, auf folgende Weise:

Man denke sich: jede Verbindung von 2 Personen aus den 3 Personen bezögen eine Rente bis zum Tode des Zunächststerbenden. Der Werth dieser 3 Renten wäre $R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(u,v)}$. So lange alle drei Personen am Leben sind, wird jährlich die Summe 3 gezahlt; sobald aber eine Person stirbt, erlöschen zwei Paare, und nur das dritte Paar bezieht die Rente weiter, bis von diesem Paar eine Person stirbt. Der Werth dieser drei Verbindungsrenten unterscheidet sich also von dem gesuchten Werth nur um eine Rente in dem jährlichen Betrage von 2, die so lange dauert, als alle drei Personen leben, und diese ist offenbar $2 . R_{(x,u,v)}$. Mithin hat man:

$$R^{t''}_{(x,u,v)} = R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(u,v)} - 2 R_{(x,u,v)} \tag{82}$$

§. 48. Eine Verbindung von drei Personen bezieht eine Rente, die so lange läuft, bis der letzte von den drei Personen stirbt. Der Werth dieser Rente mag bezeichnet werden durch $R^{t'''}_{(x,u,v)}$.

Man denke sich: jede der drei Personen beziehe eine Leibrente für sich, der Werth derselben ist $R_x + R_u + R_v$. Denselben Werth haben offenbar folgende drei Renten für die Verbindung der drei Personen: die Rente bis zum Tode des Zuerststerbenden von den drei Personen, d. h. $R_{(x,u,v)}$, die Rente bis zum Tode des Zweitsterbenden, d. h. $R^{t''}_{(x,u,v)}$, und drittens die Rente bis zum Tode des Zuletztsterbenden, d. h. $R^{t'''}_{(x,u,v)}$. Es ist also:

$$R^{t'''}_{(x,u,v)} + R^{t''}_{(x,u,v)} + R_{(x,u,v)} = R_x + R_u + R_v$$

oder

$$R^{t'''}_{(x,u,v)} = R_x + R_u + R_v - R^{t''}_{(x,u,v)} - R_{(x,u,v)}$$

Setzt man in diese Formel den oben gefundenen Werth für $R^{t''}_{(x,u,v)}$, so ist:

$$R^{t'''}_{(x,u,v)} = R_x + R_u + R_v - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(u,v)} + 2 R_{(x,u,v)} - R_{(x,u,v)}$$

oder

$$R^{t'''}_{(x,u,v)} = R_x + R_u + R_v - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(u,v)} + R_{(x,u,v)} \tag{83}$$

§. 49. Durch Combination der vorstehenden Formeln erhält man, indem $R^{t''}_{t'(x,u,v)}$ die Rente bezeichnet für die Verbindung von drei Personen im Alter von x, u und v Jahren, die aber erst beginnt mit dem Tode des Zuerststerbenden und läuft bis zum Tode des Zunächststerbenden, und $R^{t'''}_{t'(x,u,v)}$ und $R^{t'''}_{t''(x,u,v)}$ entsprechende Bedeutungen haben,

$$R^{t''}_{t'(x,u,v)} = R^{t''}_{(x,u,v)} - R_{(x,u,v)} = R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(u,v)} - 3 R_{(x,u,v)}, \tag{84}$$

$$R^{t'''}_{t'(x,u,v)} = R^{t'''}_{(x,u,v)} - R_{(x,u,v)} = R_x + R_u + R_v - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(v,u)} \tag{85}$$

und

$$R^{t'''}_{t''(x,u,v)} = R^{t'''}_{(x,u,v)} - R^{t''}_{(x,u,v)}$$

$$= R_x + R_u + R_v - 2 R_{(x,u)} - 2 R_{(x,v)} - 2 R_{(u,v)} + 3 R_{(x,u,v)}. \tag{86}$$

§. 50. Hat man eine Verbindung von vier Personen, die in dem Alter von resp. x, u, v, w Jahren stehen, und bezeichnet $R_{(x,u,v,w)}$ die Rente, die bis zum Tode des Zuerststerbenden von diesen vier Personen läuft und $R^{t''}_{(x,u,v,w)}$ die Rente, die bis zum zweiten Todesfalle läuft und haben $R^{t'''}_{(x,u,v,w)}$ und $R^{t_{iv}}_{(x,u,v,w)}$ entsprechende Bedeutungen, so ist, wie man aus ähnlichen Betrachtungen wie oben ersehen kann:

$$R_x + R_u + R_v + R_w = R^{t_{iv}}_{(x,u,v,w)} + R^{t'''}_{(x,u,v,w)} + R^{t''}_{(x,u,v,w)} + R_{(x,u,v,w)}; \tag{87}$$

$$R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} + R_{(u,v)} + R_{(u,w)} + R_{(v,w)} \tag{88}$$
$$= R^{t'''}_{(x,u,v,w)} + 2R^{t''}_{(x,u,v,w)} + 3R_{(x,u,v,w)};$$

$$R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)} = R^{t''}_{(x,u,v,w)} + 3R_{(x,u,v,w)} \tag{89}$$

Verallgemeinert man diese Resultate und wendet sie an auf eine Verbindung von n Personen, die in dem Alter von resp. x_1, x_2, x_3, ... x_n Jahren stehen, und bezeichnet $R^{t(i)}_{(n)}$ eine Rente für diese Verbindung von n Personen, die bis zum $i$ten Todesfalle läuft, und bezeichnet ferner $\Sigma R_{(k,n)}$ die Summe der Verbindungsrenten für alle verschiedenen Zusammenstellungen von k Personen aus den n gegebenen Personen, so ist:

$$\Sigma R_{(1,n)} = R^{t(n)}_{(n)} + R^{t(n-1)}_{(n)} + R^{t(n-2)}_{(n)} + \ldots\ldots R^{t'}_{(n)},$$
$$\Sigma R_{(2,n)} = R^{t(n-1)}_{(n)} + 2R^{t(n-2)}_{(n)} + 3R^{t(n-3)}_{(n)} + \ldots\ldots {}_{(n-1)}R^{t'}_{(n)},$$
$$\Sigma R_{(3,n)} = R^{t(n-2)}_{(n)} + 3R^{t(n-3)}_{(n)} + 6R^{t(n-4)}_{(n)} + \ldots\ldots \frac{(n-2)(n-1)}{1 \quad 2} R^{t'}_{(n)},$$
$$\Sigma R_{(4,n)} = R^{t(n-3)}_{(n)} + 4R^{t(n-4)}_{(n)} + 10R^{t(n-5)}_{(n)} + \ldots\ldots \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \quad 2 \quad 3} R^{t'}_{(n)},$$

etc. . . . .

$$\Sigma R_{(k,n)} = C^{k-1}_{(k-1)} \, . \, R^{t(n-k+1)}_{(n)} + C^{k-1}_{(k)} \, . \, R^{t(n-k)}_{(n)} + C^{k-1}_{(k+1)} \, . \, R^{t(n-k-1)}_{(n)} + \ldots\ldots$$
$$+ C^{k-1}_{(n-1)} \, . \, R^{t'}_{(n)};$$

wo C die Combinationszahl bedeutet und zwar so, daſs $C^r_{(q)}$ die Anzahl der Combinationen der $r$ten Classe aus q Elementen, oder

$$C^r_{(q)} = \frac{q \, . \, (q-1) \, . \, (q-2) \ldots\ldots (q-r+1)}{1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots\ldots r}$$

bedeutet.

§. 51. Aus den Formeln (87), (88) und (89) des vorigen Paragraphen findet man:

$$R^{t''}_{(x,u,v,w)} = R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)} - 3R_{(x,u,v,w)}, \tag{90}$$

$$R^{t'''}_{(x,u,v,w)} = R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} + R_{(u,v)} + R_{(u,w)} + R_{(v,w)} \tag{91}$$
$$- 2[R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)}] + 3R_{(x,u,v,w)} \text{ und}$$

$$R^{t_{iv}}_{(x,u,v,w)} = R_x + R_u + R_v + R_w - [R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} + R_{(u,v)} + R_{(u,w)} + R_{(v,w)}] \tag{92}$$
$$+ [R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)}] - R_{(x,u,v,w)}$$

Verallgemeinert man diese Resultate, indem man wieder die frühere Bezeichnung einführt, so erhält man:

$$R'^{n}_{(n)} = \Sigma R_{(1,n)} - \Sigma R_{(2,n)} + \Sigma R_{(3,n)} - + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} . \Sigma R_{(n,n)}$$
$$R'^{(n-1)}_{(n)} = \Sigma R_{(2,n)} - 2\Sigma R_{(3,n)} + 3\Sigma R_{(4,n)} - + \ldots\ldots + (-1)^{n-2} . {}_{(n-1)}\Sigma R_{(n,n)}$$
$$R'^{(n-2)}_{(n)} = \Sigma R_{(3,n)} - 3\Sigma R_{(4,n)} + 6\Sigma R_{(5,n)} - + \ldots\ldots + (-1)^{n-3} . \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}\Sigma R_{(n,n)}$$
$$R'^{(n-3)}_{(n)} = \Sigma R_{(4,n)} - 4\Sigma R_{(5,n)} + 10\Sigma R_{(6,n)} - + \ldots\ldots + (-1)^{n-4} . \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma R_{(n,n)}$$

etc. und
$$R'^{k}_{(n)} = C^{n-k}_{(n-k)} . \Sigma R_{(n-k+1,n)} - C^{n-k}_{(n-k+1)}\Sigma R_{(n-k+2,n)} + C^{n-k}_{(n-k+2)} . \Sigma_{(n-k+3,n)} - + \ldots\ldots + (-1)^{k-1} . C^{n-k}_{(n-1)} . \Sigma R_{(n,n)}$$

§. 52. Es soll der Werth einer Verbindungsrente für 3 Personen bestimmt werden, die mit dem Tode einer im Voraus bestimmten Person erlischt. Diese im Voraus bestimmte Person sei jetzt $x$jährig und die beiden andern resp. u- und $v$jährig, und die in Rede stehende Rente werde bezeichnet durch $R'^{(x)}_{(x,u,v)}$. Der Werth dieser Rente ist offenbar $R_{(x)}$. Erlischt aber die Rente mit dem Tode des jetzt $x$jährigen oder auch, sobald die beiden andern Personen gestorben sind, so findet man den Werth auf folgende Weise:

Man denke sich die Rente in zwei Verbindungsrenten zerlegt, die eine für die $x$jährige und die $u$jährige Person, die andere für die $x$jährige und die $v$jährige Person. Die Summe dieser beiden Verbindungsrenten ist aber zu grofs, denn so lange alle 3 Personen leben, hat die Rente den jährlichen Betrag 2; der wirkliche Werth ist somit

$$R_{(x,u)} + R_{(x,v)} - R_{(x,u,v)}$$

§. 53. Den Werth einer Verbindungsrente für 4 Personen zu finden, die mit dem Tode einer im Voraus bestimmten Person, oder nach dem Tode aller übrigen Personen erlischt. Diese letzteren seien gegenwärtig, resp. u, v und w Jahre alt, während die erste x Jahre alt sein mag. Zerfällt man den Werth der gesuchten Rente in drei Verbindungsrenten, jede für zwei Personen, und zwar so, dafs man hat $R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)}$, so ist diese Summe zu grofs; denn so lange alle drei Paare existiren, wird jährlich die Summe 3 gezahlt und so lange noch zwei Paare existiren, wird noch jährlich die Summe 2 gezahlt; es ist also von der obigen Summe abzuziehen 1) der Werth einer Rente, laufend bis zur Auflösung des ersten Paares, 2) der Werth einer Rente von jetzt laufend bis zur Auflösung des zweiten Paares. Die erste Auflösung eines Paares erfolgt mit dem ersten Todesfall unter den vier Personen, der Rentenwerth bis dahin ist also $R_{(x,u,v,w)}$.

Die Rente bis dahin, dafs wieder ein Paar aufgelöst wird, kann man sich so zusammengesetzt denken. Man denke sich $R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)}$; dieser Werth entspricht unserer Bedingung, nur ist der jährliche Betrag, so lange alle vier Personen leben, 3, mithin mufs noch $2 . R_{(x,u,v,w)}$ abgezogen werden. Von $R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)}$ ist also zu subtrahiren:

1) $R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} - 2R_{(x,u,v,w)}$ und
2) $R_{(x,u,v,w)}$.

Mithin ist der Werth der in Rede stehenden Rente

$$R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} - R_{(x,u,v)} - R_{(x,u,w)} - R_{(x,v,w)} + R_{(x,u,v,w)}$$

Anmerkung. Die Formeln der beiden vorhergehenden Paragraphen hätte man auch auf folgende Weise herleiten können. Eine Rente, die mit dem Tode der jetzt $x$jährigen Person oder mit dem Tode der zuletztsterbenden der beiden anderen Personen, vermehrt um eine Rente, welche mit dem Tode der zuletztsterbenden aller drei Personen erlischt, ist gleich einer Rente, laufend bis zum Tode der jetzt $x$jährigen Person, vermehrt um eine Verbindungsrente für die beiden andern Personen, laufend bis zum Tode der zuletztsterbenden, so dafs man, wenn man auf beiden Seiten $R^{t_{III}}{}_{(x,u,v)}$ subtrahirt, als Rentenwerth erhält,

$$\begin{aligned}
&R_x + R^{t_{II}}{}_{(u,v)} - R^{t_{III}}{}_{(x,u,v)} \\
&= R_x + R_u + R_v - R_{(u,v)} - [R_x + R_u + R_v - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(u,v)} + R_{(x,u,v)}] \\
&= R_{(x,u)} + R_{(x,v)} - R_{(x,u,v)}
\end{aligned}$$

welche Formel der obern identisch ist.

Ebenso erhält man als Werth der in §. 93 behandelten Rente:

$$\begin{aligned}
&R_{(x)} + R^{t_{III}}{}_{(u,v,w)} - R^{t_{IV}}{}_{(x,u,v,w)} \\
&= R_x + R_u + R_v + R_w - R_{(u,v)} - R_{(u,w)} - R_{(v,w)} \\
&+ R_{(u,v,w)} - [R_x + R_u + R_v + R_w - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(x,w)} - R_{(u,v)} - R_{(u,w)} - R_{(v,w)} \\
&+ R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)} - R_{(x,u,v,w)}] \\
&= R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} - R_{(x,u,v)} - R_{(x,u,w)} \\
&\qquad - R_{(x,v,w)} + R_{(x,u,v,w)}
\end{aligned}$$

welches wieder dieselbe Formel wie oben ist.

§. 54. Der Werth einer Rente für vier Personen soll bestimmt werden, die entweder erlischt mit dem Tode des Zuletztsterbenden des einen Paares, oder mit dem Tode der Zuletztsterbenden der beiden anderen Personen. Die beiden Personen des einen Paares seien jetzt resp. x- und $u$jährig, die des andern Paares resp. v- und $w$jährig. Der Werth der gesuchten Rente ist, dem Vorstehenden analog:

$$\begin{aligned}
&R^{t_{II}}{}_{(x,u)} + R^{t_{II}}{}_{(v,w)} - R^{t_{IV}}{}_{(x,u,v,w)} \\
&= R_x + R_u - R_{(x,u)} + R_v + R_w - R_{(v,w)} \\
&- [R_x + R_u + R_v + R_w - R_{(x,u)} - R_{(x,v)} - R_{(x,w)} - R_{(u,v)} - R_{(u,w)} - R_{(v,w)} \\
&+ R_{(x,u,v)} + R_{(x,u,w)} + R_{(x,v,w)} + R_{(u,v,w)} - R_{(x,u,v,w)}] \\
&= R_{(x,v)} + R_{(x,w)} + R_{(u,v)} + R_{(u,w)} - R_{(x,u,v)} - R_{(x,u,w)} - R_{(x,v,w)} \\
&\qquad - R_{(u,v,w)} + R_{(x,u,v,w)}
\end{aligned}$$

Anmerkung. Ebenso würde eine Rente für fünf Personen, erlöschend entweder mit dem Tode einer bestimmten jetzt $x$jährig, oder mit dem Tode der zuletztsterbenden der vier anderen ausgedrückt werden durch

$$R_x + R^{t_{IV}}{}_{(t,u,v,w)} - R^{t_V}{}_{(x,t,u,v,w)}.$$

Oder, soll die Rente für fünf Personen erlöschen mit dem Tode der zuletztsterbenden von zwei bestimmten Personen (jetzt x- und $t$jährig), oder mit dem Tode der zuletztsterbenden der drei andern Personen, so ist der Werth einer solchen Rente

$$R^{t_{II}}{}_{(x,t)} + R^{t_{III}}{}_{(u,v,w)} - R^{t_V}{}_{(x,t,u,v,w)}.$$

§. 55. Es soll der Werth einer Rente für zwei Personen, zahlbar bis zum Tode des Zuletztsterbenden gesucht werden, wenn diese Rente erst nach dem Tode einer dritten Person zu laufen beginnt. Begänne die Rente sogleich, so wäre ihr Werth

$$R^{t_{II}}{}_{(u,v)} = R_u + R_v - R_{(u,v)}$$

Hiervon mufs aber noch der Werth einer Rente für drei Personen abgezogen werden, welche schliefst mit dem Tode der einen Person, oder mit dem Tode der zuletztsterbenden der beiden andern.

Diese Rente ist nach §. 52:

$$= R_{(x,u)} + R_{(x,v)} - R_{(x,u,v)}.$$

Mithin ist der Werth unserer Rente, bezeichnet durch $R^{t''}{}_{tx\,(u,v)}$

$$R^{t''}{}_{tx\,(u,v)} = R_u + R_v - R_{(u,v)} - [R_{(x,u)} + R_{(x,v)} - R_{(x,u,v)}] \tag{93}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist zugleich derjenige, womit man den Rentenwerth dividiren mufs, wenn man die jährliche Prämie haben will. Ganz ebenso findet man als Rentenwerth für eine Rente bis zum Tode der Zuletztsterbenden von drei Personen, beginnend mit dem Tode einer vierten Person:

$$\begin{aligned} R^{t'''}{}_{tx\,(u,v,w)} = & R_u + R_v + R_w - R_{(u,v)} - R_{(u,w)} - R_{(v,w)} + R_{(u,v,w)} \\ & - [R_{(x,u)} + R_{(x,v)} + R_{(x,w)} - R_{(x,u,v)} - R_{(x,u,w)} - R_{(x,v,w)} \\ & + R_{(x,u,v,w)}] \end{aligned} \tag{94}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist wieder der Divisor, womit dividirt werden mufs, wenn man die jährliche Prämie haben will.

Anmerkung. Wie leicht erhellt, ist auch

$$R^{t''}{}_{tx\,(u,v)} = R^{t'''}{}_{(x,u,v)} - R_x \tag{93a}$$

$$\text{und } R^{t'''}{}_{tx\,(u,v,w)} = R^{t^{IV}}{}_{(x,u,v,w)} - R_x \tag{94a}$$

§. 56. Es soll der Werth einer Leibrente für eine Person bestimmt werden, die aber erst beginnt mit dem Tode von zwei anderen Personen. Dieser Rentenwerth ist offenbar:

$$\begin{aligned} & R_v - [R_{(x,v)} + R_{(u,v)} - R_{(x,u,v)}] \\ & = R^{t'''}{}_{(x,u,v)} - R^{t''}{}_{(x,u)}. \end{aligned}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist dieselbe Rente wie in §. 52, nur ist v mit x vertauscht. Dies ist zugleich der Divisor für jährliche Prämien.

§. 57. Es soll der Werth einer Rente für zwei Personen bestimmt werden, welche bis zum Tode der zuletztsterbenden der beiden Personen gezahlt wird, die aber erst gezahlt wird nach dem Tode von zwei andern Personen. Diesen Werth erhält man offenbar, wenn von $R^{t''}{}_{(v,w)}$ abgezogen wird der Werth der in §. 54 behandelten Rente, und somit ist unser gesuchter Werth:

$$\begin{aligned} & R^{t''}{}_{(v,w)} - [R^{t''}{}_{(x,u)} + R^{t''}{}_{(v,w)} - R^{t^{IV}}{}_{(x,u,v,w)}] \\ & = R^{t^{IV}}{}_{(x,u,v,w)} - R^{t''}{}_{(x,u)}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $R^{t''}{}_{(x,u)} + R^{t''}{}_{(v,w)} - R^{t^{IV}}{}_{(x,u,v,w)}$ ist zugleich der Divisor für jährliche Prämien.

Anmerkung. Die in §. 55 behandelten Fälle finden Anwendung, wenn ein Vater seinen Kindern, oder seiner Frau und Kindern eine gemeinschaftliche Ueberlebensrente sichern will, welche zahlbar ist nach seinem Tode bis zum Tode der zuletztsterbenden der zu versorgenden Personen, während die in §. 56 und §. 57 behandelten Renten Ueberlebensrenten für Kinder sind, welche erst zahlbar werden nach dem Tode der beiden Eltern.

Vierter Abschnitt.

Kapital-Versicherung für verbundene Leben.

§. 58. Eine Verbindung von zwei Personen, wovon die eine x Jahre, die andere u Jahre alt ist, erwirbt durch eine einmalige Kapitalzahlung, bezeichnet durch $C_{t,(x,u)}$ die Versicherung der Summe 1, zahlbar nach dem Tode der zuerststerbenden der beiden Personen. Es fragt sich, welchen Werth $C_{t,(x,u)}$ hat.

Nehmen wir an, dafs von $l_x \,.\, l_u$ solchen Paaren jedes eine solche Versicherung abschliefse, so existiren nach einem Jahre noch $l_{x+1} \,.\, l_{u+1}$ vollständige Paare, und somit ist $l_x \,.\, l_u - l_{x+1} \,.\, l_{u+1}$ die Anzahl der innerhalb des ersten Jahres aufgelösten Paare und zugleich die zur Auszahlung kommende Summe, falls die Versicherungssumme auch dann gezahlt wird, wenn beide Versicherte in demselben Jahre sterben. Der jetzige Werth dieser Summe ist:

$$\frac{l_x \,.\, l_u - l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p}.$$

Ebenso findet man den Werth der nach 2 Jahren fälligen Summe:

$$\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1} - l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2}$$

etc. Die Summe dieser Werthe bis zu den höchsten Altern fortgesetzt, mufs der Kapitalzahlung der $l_x \,.\, l_u$ Paare gleich sein. Es ist also:

$$\begin{aligned}
C_{t,(x,u)} \,.\, l_x \,.\, l_u &= \frac{l_x \,.\, l_u - l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} \\
&\quad + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1} - l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2} - l_{x+3} \,.\, l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots \\
&= \frac{l_x \,.\, l_u}{p} - \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \ldots\ldots \\
&= \frac{l_x \,.\, l_u}{p} - \frac{p-1}{p}\left\{\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right\}
\end{aligned}$$

Fügt man innerhalb der Klammer des vorstehenden Ausdrucks: $l_x \,.\, l_u - l_x \,.\, l_u$ hinzu, so wird:

$$\begin{aligned}
C_{t,(x,u)} \,.\, l_x \,.\, l_u &= \frac{l_x \,.\, l_u}{p} - \frac{p-1}{p}\left\{l_x \,.\, l_u + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots - l_x \,.\, l_u\right\} \\
&= \frac{l_x \,.\, l_u}{p} + \frac{p-1}{p}\, l_x \,.\, l_u - \frac{p-1}{p}\left\{l_x \,.\, l_u + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+1}}{p^2} + \ldots\ldots\right\} \\
&= l_x \,.\, l_u - \frac{p-1}{p}\left\{l_x \,.\, l_u + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right\}
\end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{l_x \,.\, l_u}\left\{l_x \,.\, l_u + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right\} \qquad (95)$$

Dividirt man das letzte Glied dieses Ausdrucks im Zähler und Nenner mit p^u oder p^x, so ergiebt sich:

$$C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{l_x \cdot \lambda_u + l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1} + l_{x+2} \cdot \lambda_{u+2} + \ldots\ldots}{l_x \cdot \lambda_u}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma(l_x \cdot \lambda_u)}{l_x \cdot \lambda_u} \tag{95 a}$$

oder

$$C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\lambda_x \cdot l_u + \lambda_{x+1} \cdot l_{u+1} + \lambda_{x+2} \cdot l_{u+2} + \ldots\ldots}{\lambda_x \cdot l_u}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma(\lambda_x \cdot l_u)}{\lambda_x \cdot l_u} \tag{95 b}$$

Mit Anwendung von Formel (62 a, b) wird hieraus:

$$C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \cdot R_{(x,u)} \tag{95 c}$$

Die einmalige Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar beim Tode des von zwei Versicherten zuerststerbenden findet man also ganz ebenso wie die einmalige Prämie für die gewöhnliche Lebensversicherung, nur daſs man anstatt der Leibrente die Verbindungsrente anwendet. Dasselbe gilt, wie wir bald sehen werden, von der jährlichen Prämie.

§. 59. Für die vorstehende Versicherung soll der Werth der jährlich pränumerando zahlbaren Prämien bestimmt werden. Die Prämienzahlung dauert so lange, wie das versicherte Paar vollständig ist, der Werth derselben ist also die Verbindungsrente für das Paar, multiplicirt mit dem jährlichen Prämienbetrage, d. h. $= R_{(x,u)} \cdot P_{t,(x,u)}$, wo $P_{t,(x,u)}$ die in Rede stehende Prämie bedeutet. Die Leistung der Bank oder die einmalige Prämie ist, wie im vorigen Paragraph entwickelt:

$$C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}$$

folglich

$$P_{t,(x,u)} = \frac{C_{t,(x,u)}}{R_{(x,u)}} \tag{96}$$

oder

$$P_{t,(x,u)} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}} \tag{96 a}$$

oder

$$P_{t,(x,u)} = \frac{1}{R_{(x,u)}} - \frac{p-1}{p}. \tag{96 b}$$

Anmerkung. Es erhellt leicht, daſs, soll die Prämienzahlung nur y Jahre hindurch geleistet werden, wofern die Auflösung nicht schon in diesen y Jahren erfolgt, die Prämie dargestellt wird durch

$$\frac{C_{t,(x,u)}}{R^y_{(x,u)}} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} \cdot R_{(x,u)}}{R^y_{(x,u)}} \tag{97}$$

§. 60. Soll die Versicherungssumme 1 nicht zur Auszahlung kommen, falls das versicherte Paar innerhalb der ersten y Jahre, sei es durch den Tod der einen oder der beiden Personen, aufgelöst wird, so findet bei $l_x \cdot l_u$ solcher Versicherungen die erste Auszahlung nach $(y+1)$ Jahren statt, und zwar für die in dem $(y+1)$ten

Jahre aufgelösten $[l_{x+y} \cdot l_{u+y} - l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}]$ Paare. Der Werth dieser Auszahlung ist $\dfrac{l_{x+y} \cdot l_{u+y} - l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}}$. Der Werth der Auszahlung des folgenden Jahres ist $\dfrac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1} - l_{u+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^2}$ etc. Addirt man diese Werthe und dividirt die Summe durch $l_x \cdot l_u$, so hat man den Werth der Bankleistung für das einzelne Paar, und wird dieser bezeichnet durch ${}_yC_{t,(x,u)}$, so ist:

$${}_yC_{t,(x,u)} = \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y} - l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1} - l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{l_x \cdot l_u \cdot p^{y+1}} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{l_x \cdot l_u \cdot p^{y+1}} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots - \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{p^y}\right\}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{l_x \cdot l_u \cdot p^{y+1}} + \frac{p-1}{p} \cdot \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{l_x \cdot l_u \cdot p^y} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{l_x \cdot l_u \cdot p^y} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_{x+y} \cdot l_{u+y}}{p^y} + \frac{l_{x+y+1} \cdot l_{u+y+1}}{p^{y+1}} + \frac{l_{x+y+2} \cdot l_{u+y+2}}{p^{y+2}} + \ldots\right\}$$

Dividirt man im vorstehenden Ausdruck Zähler und Nenner durch p^{u+y}, so erhält man

$${}_yC_{t,(x,u)} = \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y} + l_{x+y+1} \cdot \lambda_{u+y+1} + \ldots\ldots}{l_x \cdot \lambda_u}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{p-1}{p}\,{}_yR_{(x,u)} \tag{97}$$

$$= \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u}\left\{1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y} + l_{x+y+1} \cdot \lambda_{u+y+1} + \ldots\ldots}{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}\right\}, \text{ d. h.}$$

$${}_yC_{t,(x,u)} = \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+y,u+y)}\right\} \tag{97 a}$$

oder
$${}_yC_{t,(x,u)} = \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} \cdot C_{t,(x+y,u+y)} \tag{97 b}$$

In diesen Formeln kann man, wie leicht einzusehen, l mit λ vertauschen.

Anmerkung. Die jährliche bis zur Auflösung des Paares zahlbare Prämie wird hier gefunden, indem man ${}_yC_{t,(x,u)}$ dividirt durch $R_{(x,u)}$.

§. 61. Die Versicherungssumme 1 soll nicht beim Tode des Zuerststerbenden, sondern beim Tode des Zuletztsterbenden von 2 Versicherten gezahlt werden. Die einmalige Zahlung werde hier bezeichnet durch $C_{t,,(x,u)}$.

Schliefsen zwei Personen, die ein Paar bilden, zwei Versicherungen, die eine so, dafs beim Tode des Zuerststerbenden die Summe 1 gezahlt wird, die andere, dafs beim Tode des Zuletztsterbenden die Summe 1 gezahlt wird, so erreichen sie offen-

bar dasselbe, wenn jede Person auf ihr eigenes Leben die Summe 1 versicherte; es ist somit:

$$C_{t''(x,u)} + C_{t'(x,u)} = C_x + C_u, \text{ oder}$$

$$C_{t''(x,u)} = C_x + C_u - C_{t'(x,u)} \tag{98}$$

Nun ist nach Formel (32 b):

$$C_x = 1 - \frac{p-1}{p} \,.\, R_x$$

$$C_u = 1 - \frac{p-1}{p} \,.\, R_u$$

und nach Formel (95 c):

$$C_{t'(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \,.\, R_{(x,u)};$$

mithin

$$C_{t''(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} R_x + 1 - \frac{p-1}{p} R_u - 1 + \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} [R_x + R_u - R_{(x,u)}] \tag{98 a}$$

oder

$$C_{t''(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \,.\, R^{t''}{}_{(x,u)} \tag{98 b}$$

Anmerkung 1. Dieselbe Formel kann man auch auf folgende Weise erhalten:

Nehmen wir an, dafs von $l_x \,.\, l_u$ Paaren jedes eine solche Versicherung schliefst (die eine Person jedes Paares sei beim Beginne der Versicherung $x$jährig, die andere $u$jährig), so sterben von diesen zweimal $l_x \,.\, l_u$ Personen

im ersten Jahre $t_{x+1} \cdot l_u$ und $l_x \cdot t_{u+1}$ Personen,
" zweiten " $t_{x+2} \cdot l_u$ " $l_x \cdot t_{u+2}$ "
" dritten " $t_{x+3} \cdot l_u$ " $l_x \cdot t_{u+3}$ "

etc. Die Anzahl der Todesfälle eines Jahres giebt die in diesem Jahre fällige Versicherungssumme, wenn man davon die Anzahl derjenigen Todesfälle abzieht, bei denen nach der im §. 58 behandelten Versicherungsart gezahlt wird, und diese Anzahl war

im ersten Jahre $l_x \,.\, l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1}$
" zweiten " $l_{x+1} \cdot l_{u+1} - l_{x+2} \cdot l_{u+2}$
" dritten " $l_{x+2} \cdot l_{u+2} - l_{x+3} \cdot l_{u+3}$

Der Werth der Zahlung des ersten Jahres beträgt somit:

$$\frac{t_{x+1} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+1} - [\, l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1}]}{p}$$

des zweiten Jahres:

$$\frac{t_{x+2} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+2} - [\, l_{x+1} \cdot l_{u+1} - l_{x+2} \cdot l_{u+2}]}{p^2}$$

des dritten Jahres:

$$\frac{t_{x+3} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+3} - [\, l_{x+2} \cdot l_{u+2} - l_{x+3} \cdot l_{u+3}]}{p^3}$$

etc. Die Summe aller dieser Werthe bis zum höchsten Alter, dividirt durch $l_x \,.\, l_u$ giebt den gesuchten Werth der Versicherung für ein einzelnes Paar, oder die einmalige Zahlung. Es ist also:

$$C_{t''(x,u)} = \frac{t_{x+1} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+1} - (\, l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1})}{p \,.\, l_x \,.\, l_u}$$

$$+ \frac{t_{x+2} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+2} - (\, l_{x+1} \cdot l_{u+1} - l_{x+2} \cdot l_{u+2})}{p^2 \,.\, l_x \,.\, l_u}$$

$$+ \frac{t_{x+3} \cdot l_u + l_x \cdot t_{u+2} - (\, l_{x+2} \cdot l_{u+2} - l_{x+3} \cdot l_{u+3})}{p^3 \,.\, l_x \,.\, l_u}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots$$

oder

$$C_{t_{,,}(x,u)} = \frac{l_u}{l_x . l_u}\left(\frac{t_{x+1}}{p} + \frac{t_{x+2}}{p^2} + \frac{t_{x+3}}{p^3} + \dots\dots\right) + \frac{l_x}{l_x . l_u}\left(\frac{t_{u+1}}{p} + \frac{t_{u+2}}{p^2} + \frac{t_{u+2}}{p^3} + \dots\dots\right)$$

$$- \frac{1}{l_x . l_u}\left\{\frac{l_x . l_u - l_{x+1} . l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+1} . l_{u+1} - l_{x+2} . l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2} . l_{u+2} - l_{x+3} . l_{u+3}}{p^3} + \dots\dots\right\}$$

Im ersten Gliede der rechten Seite hebt sich l_u, im zweiten l_x. Dividirt man dann noch Zähler und Nenner im ersten Gliede durch p^x, im zweiten Gliede durch p^u, so erhält man:

$$C_{t_{,,}(x,u)} = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} + \frac{\Sigma \tau_{u+1}}{\lambda_u}$$

$$- \frac{1}{l_x . l_u}\left\{\frac{l_x . l_u - l_{x+1} . l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+1} . l_{u+1} - l_{x+2} . l_{x+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2} . l_{u+2} - l_{x+3} . l_{u+3}}{p^3} + \dots\dots\right\}$$

Die beiden ersten Glieder sind nach Formel (32) C_x und C_u, während das letzte Glied nach §. 58 $C_{t,(x,u)}$ ist, und somit ist, wie schon oben gefunden,

$$C_{t_{,,}(x,u)} = C_x + C_u - C_{t,(x,u)},$$

entsprechend der Formel (67):

$$R^{t_{,,}}{}_{(x,u)} = R_x + R_u - R_{(x,u)}.$$

Anmerkung 2. Die jährlich zahlbare Prämie findet man hier, dem Früheren analog, wenn man $C_{t_{,,}(x,u)}$ dividirt durch $R^{t_{,,}}{}_{(x,u)}$. Die so gefundene Prämie ist dann zahlbar bis zum Tode der zuletztsterbenden von den beiden versicherten Personen.

Soll die Prämienzahlung aber nur bis zum Tode der zuerststerbenden Person gezahlt werden, so findet man die entsprechende Prämie, indem man $C_{t_{,,}(x,u)}$ durch $R_{(x,u)}$ dividirt; oder soll die Prämienzahlung an das Leben einer bestimmten Person geknüpft sein, etwa an das der $x$jährigen, so ergiebt sich die jährliche Prämie, indem $C_{t,(x,u)}$ durch R_x dividirt wird.

§. 62. Ueberlebensversicherung. Eine $x$jährige Person (der Versorger) erwirbt die Versicherung der Summe 1, zahlbar bei ihrem Tode, falls alsdann noch eine andere, im Voraus bestimmte, beim Abschlufs der Versicherung $u$jährige Person (die zu versorgende Person) am Leben ist. Wieviel beträgt die einmalige und wieviel die jährliche Prämie für solche Versicherung?

Nehmen wir $l_x . l_u$ solcher Paare, so sind davon nach einem Jahre $t_{x+1} . l_u$ Versorger gestorben, während von den zugehörigen $t_{x+1} . l_u$ zu versorgenden Personen $t_{x+1} . t_{u+1}$ verstorben sind. Bei der Annahme, dafs die halbe Anzahl dieser Personen vor und die andere nach ihren Versorgern gestorben sind, erhält man als die nach einem Jahre fällige Versicherungssumme:

$$t_{x+1} . l_u - \tfrac{1}{2} . t_{x+1} . t_{u+1}$$
$$= t_{x+1}\left[l_u - \tfrac{1}{2} t_{u+1}\right]$$

oder führt man statt der Zahlen der Gestorbenen die Zahlen der Lebenden ein, so hat man

$$(l_x - l_{x+1})\left[l_u - \tfrac{1}{2}(l_u - l_{u+1})\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1})(l_u + l_{u+1})$$

Von den am Anfang des zweiten Jahres noch vollständigen $l_{x+1} . l_{u+1}$ Paaren sterben im zweiten Jahre $t_{x+2} . t_{u+1}$ Versorger, und von den diesen zugehörigen $t_{x+2} . t_{u+1}$ zu versorgenden Personen sterben $t_{x+2} . t_{u+2}$. Unter derselben Annahme wie oben wird also die im zweiten Jahre fällige Summe ausgedrückt durch

$$t_{x+2} \,.\, l_{u+1} - \tfrac{1}{2}\, t_{x+2} \,.\, t_{u+2}$$
$$= t_{x+2}\,[l_{u+1} - \tfrac{1}{2}\, t_{u+2}]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(l_{x+1} - l_{x+2})\,(l_{u+1} + l_{u+2})$$

Ebenso ist die im dritten Jahre fällige Versicherungssumme $\frac{1}{2}\,(l_{x+2} - l_{x+3})\,(l_{u+2} + l_{u+3})$. Addirt man diese Summe bis zum höchsten Alter, nachdem man sie auf den Anfang der Versicherungen abgezinst hat und dividirt dann die Summe durch $l_x \,.\, l_u$, so erhält man den Werth der einzelnen Versicherung, oder die einmalige Prämie. Bezeichnen wir diese durch $C_{tx(x,u)}$, so ist:

$$C_{tx(x,u)} = \frac{1}{l_x \,.\, l_u}\Big\{\frac{1}{2p}\,(l_x - l_{x+1})\,(l_u - l_{u+1})$$
$$+ \frac{1}{2p^2}\,(l_{x+1} - l_{x+2})\,(l_{u+1} + l_{u+2}) + \frac{1}{2p^3}\,(l_{x+2} - l_{x+3})\,(l_{u+2} + l_{u+3})$$
$$+ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot\Big\}$$

Löst man in dem vorstehenden Ausdruck die kleinen Klammern auf, so ergiebt sich:

$$C_{tx(x,u)} = \frac{1}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big[\frac{1}{p}\,(l_x \,.\, l_u + l_x \,.\, l_{u+1} - l_{x+1} \,.\, l_u - l_{x+1} \,.\, l_{u+1})$$
$$+ \frac{1}{p^2}\,(l_{x+1} \,.\, l_{u+1} + l_{x+1} \,.\, l_{u+2} - l_{x+2} \,.\, l_{u+1} - l_{x+2} \,.\, l_{u+2})$$
$$+ \frac{1}{p^3}\,(l_{x+2} \,.\, l_{u+2} + l_{x+2} \,.\, l_{u+3} - l_{x+3} \,.\, l_{u+2} - l_{x+3} \,.\, l_{u+3})$$
$$+ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot\Big]$$

Ordnet man die Glieder anders, so erhält man:

$$C_{tx(x,u)} = \frac{1}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big\{\frac{l_x \,.\, l_u}{p} + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p^2} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\Big\}$$
$$+ \frac{1}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big\{\frac{l_x \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big\{\frac{l_{x+1} \,.\, l_u}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+1}}{p^2} + \frac{l_{x+3} \,.\, l_{u+2}}{p^3} + \ldots\ldots\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\,l_x \,.\, l_u}\Big\{\frac{l_{x+1} \,.\, l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \,.\, l_{u+2}}{p^2} + \frac{l_{x+3} \,.\, l_{u+3}}{p^3} + \ldots\ldots\Big\}$$

Nimmt man in der ersten Reihe noch p vor die Klammer, ebenso in der zweiten und dritten Reihe, und multiplicirt man die zweite Reihe mit $\frac{l_{u+1}}{l_{u+1}}$ und die dritte Reihe mit $\frac{l_{x+1}}{l_{x+1}}$, und setzt man innerhalb der Klammer der vierten Reihe $l_x . l_u - l_x . l_u$ hinzu, so ergiebt sich:

$$C_{tx\,(x,u)} = \frac{1}{2p}\,\frac{l_x \cdot l_u + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \dots\dots}{l_x \cdot l_u}$$

$$+ \frac{1}{2p} \cdot \frac{l_{u+1}}{l_u} \cdot \frac{l_x \cdot l_{u+1} + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+2}}{p} + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+3}}{p^2} + \dots\dots}{l_x \cdot l_{u+1}}$$

$$- \frac{1}{2p} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1} \cdot l_u + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+3} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \dots\dots}{l_{x+1} \cdot l_u}$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{l_x \cdot l_u + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \dots\dots}{l_x \cdot l_u} - 1 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{R_{(x,u)}}{p} + \frac{l_{u+1}}{l_u} \cdot \frac{R_{(x,u+1)}}{p} - \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{R_{(x+1,u)}}{p} - R_{(x,u)} + 1 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ 1 - R_{(x,u)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{R_{(x+1,u)}}{p} + \frac{l_{u+1}}{l_u}\,\frac{R_{(x,u+1)}}{p} \right\}$$

Da ferner

$$\frac{l_{x+1}}{l_x \cdot p} = \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}$$

und

$$\frac{l_{u+1}}{l_u \cdot p} = \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}$$

so wird schliefslich

$$C_{tx\,(x,u)} = \tfrac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{p-1}{p}\,R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,R_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,R_{(x,u+1)} \right\} \tag{99}$$

Aus diesem Werth der einmaligen Zahlung erhält man die jährliche Prämie, indem man denselben mit $R_{(x,u)}$ dividirt, da die Prämienzahlung so lange dauert, als das Paar vollständig existirt.

Anmerkung 1. Da

$$1 - \frac{p-1}{p}\,R_{(x,u)} = C_{t,\,(x,u)},$$

so kann man die obige Formel auch so schreiben:

$$C_{tx(x,u)} = \tfrac{1}{2} \left\{ C_{t,\,(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,R_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,R_{(x,u+1)} \right\} \tag{99a}$$

Anmerkung 2. Ebenso findet man

$$C_{tu\,(x,u)} = \tfrac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{p-1}{p}\,R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\,R_{(x,u+1)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\,R_{(x+1,u)} \right\}$$

Addirt man diese Formel und Formel (99), so ist

$$C_{tx(x,u)} + C_{tu\,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p}\,R_{(x,u)}$$
$$= C_{t,\,(x,u)}.$$

Ist $u = x$, so ist

$$C_{tx\,(x,u)} = C_{tu\,(x,u)} = \tfrac{1}{2}\,C_{t,\,(x,u)}$$

Dieselben Beziehungen, wie die beiden vorstehenden, finden auch zwischen den jährlichen Prämien statt.

Anmerkung 3. Die Formel (99) stimmt mit den von Baily und Milne aufgestellten Formeln überein und unterscheidet sich im Wesentlichen nur dadurch von denselben, dafs hier die pränumerando zahlbaren Renten angewendet worden, wodurch unsere Formel an Einfachheit gewinnt; dagegen unterscheidet sie sich wesentlich von der von Dr. Wiegand in seinen „mathematischen Grundlagen der Lebens-Versicherungs-Institute, Halle 1854" aufgestellten Formel. Dieselbe berücksichtigt nämlich nicht den Fall, dafs wenn die beiden Personen eines Paares, der Versorger und die zu versorgende Person, in demselben Jahre sterben, doch für die Versicherungsbank Zahlungsverbindlichkeit eintreten kann. Es werden also bei der Auszahlung der Versicherungssumme nur diejenigen zu versorgenden Personen berücksichtigt, die noch am Ende des Sterbejahrs der zugehörigen Versorger leben. — Von $l_x \cdot l_u$ $x$jährigen Versorgern sterben im ersten Jahre $t_{x+1} \cdot l_u$ und von den $t_{x+1} \cdot l_u$ jenen sterbenden Versorgern zugehörigen Personen leben am Ende des Jahres $t_{x+1} \cdot l_{u+1}$ Personen, und nur so viele sind nach Herrn Dr. Wiegand's Annahme berechtigt, die Versicherungssumme zu empfangen, und somit ist nach dieser Annahme die am Ende des ersten Jahres fällige Versicherungssumme $t_{x+1} \cdot l_{u+1}$. Die am Ende des zweiten Versicherungsjahres fällige Summe ist ähnlich $t_{x+2} \cdot l_{u+2}$, und man erhält als Kapitalzahlung für solche Versicherung

$$\frac{\dfrac{t_{x+1} \cdot l_{u+1}}{p} + \dfrac{t_{x+2} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots}{l_x \cdot l_u}$$

Dies ist im Wesentlichen die Wiegand'sche Formel. Dieselbe läfst sich aber noch auf folgende Weise umformen. Führt man für die Zahlen der Sterbenden die Differenzen der Zahlen der Lebenden ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{(l_x - l_{x+1})\, l_{u+1}}{p} + \frac{(l_{x+1} - l_{x+2})\, l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{\frac{l_x \cdot l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots - \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{p} - \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+2}}{p^2} - \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{l_{u+1}}{p \cdot l_u} \cdot \frac{1}{l_x \cdot l_{u+1}}\left\{l_x \cdot l_{u+1} + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+2}}{p} + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+3}}{p^2} + \ldots\ldots\right\}$$

$$- \frac{1}{l_x \cdot l_u}\left\{l_x \cdot l_u + \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{p} + \frac{l_{x+2} \cdot l_{u+2}}{p^2} + \ldots\ldots - l_x \cdot l_u\right\}$$

$$= \frac{l_{u+1}}{p \cdot l_u} \cdot R_{(x,u+1)} - R_{(x,u)} + 1$$

$$= 1 - R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}$$

In dieser Form erscheint diese Formel nur als ein specieller Fall der Formel (80) und man erhält die Wiegand'sche Formel daraus, wenn man $m = 1$ setzt (d. h. die Ueberlebensrente soll nur einmal zur Auszahlung kommen). Jene Formel gestaltet sich nämlich für $x = 1$:

$$R^{(tx)+1}_{tx(u)} = R_u - R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u}\left[R_{(u+1)} - R_{(x,u+1)}\right]$$

$$= R_u - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot R_{(u+1)} - R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot R_{(x,u+1)};$$

oder setzt man $R_u = \dfrac{\Sigma\lambda_u}{\lambda_u}$ und $R_{u+1} = \dfrac{\Sigma\lambda_{u+1}}{\lambda_{u+1}}$,

so ist

$$R_u - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot R_{(u+1)} = \frac{\Sigma\lambda_u}{\lambda_u} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot \frac{\Sigma\lambda_{u+1}}{\lambda_{u+1}}$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_u - \Sigma\lambda_{u+1}}{\lambda_u} = \frac{\lambda_u}{\lambda_u} = 1 \text{, mithin ist}$$

$$R^{(tx)+1}_{tx(u)} = 1 - R_{(x,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot R_{(x,u+1)}$$

Anmerkung 4. Die Formel (75) kann jetzt noch umgeformt werden in

$$\underset{tx}{R}r_{(u)} = \frac{\underset{tx}{R}_{(u)}}{1 - C_{tu(x,u)}} \tag{75b}$$

§. 63. Ist an die in dem vorigen Paragraphen behandelte Versicherung die Bedingung geknüpft, daſs die Versicherungssumme nicht gezahlt wird, wenn der Versorger innerhalb der ersten y Jahre stirbt, so fallen in der Entwickelung für $C_{tx(x,u)}$ die den ersten y Jahren entsprechenden Glieder weg, und es ist, wenn hier die einmalige Zahlung bezeichnet wird durch ${}_yC_{tx(x,u)}$,

$$\begin{aligned} {}_yC_{tx(x,u)} = & \frac{(l_{x+y} - l_{x+y+1})(l_{u+y} + l_{u+y+1})}{2p^{y+1} \cdot l_x \cdot l_u} \\ & + \frac{(l_{x+y+1} - l_{x+y+2})(l_{u+y+1} + l_{u+y+2})}{2p^{y+2} \cdot l_x \cdot l_u} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nimmt man hier dieselben Umwandlungen vor, wie oben, so wird schlieſslich

$${}_yC_{tx(x,u)} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{p-1}{p} \cdot \underset{y}{R}_{(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} \cdot \underset{y}{R}_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)}\right\}, \tag{100}$$

welchen Ausdruck man auch umformen kann in

$$\begin{aligned} {}_yC_{tx(x,u)} = & \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} \cdot \tfrac{1}{2}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+y,u+y)} - \frac{\lambda_{x+y+1}}{\lambda_{x+y}} R_{(x+y+1,u+y)} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{u+y+1}}{\lambda_{u+y}} R_{(x+y,u+y+1)}\right\}, \end{aligned}$$

d. h.

$${}_yC_{tx(x,u)} = \frac{l_{x+y} \cdot \lambda_{u+y}}{l_x \cdot \lambda_u} \cdot C_{t(x+y)(x+y,u+y)} \tag{100a}$$

Anmerkung. Die jährliche Prämie wird hier, wenn sie bis zur Auflösung des Paares gezahlt werden soll, gefunden, indem man wieder ${}_yC_{tx(x,u)}$ dividirt durch $R_{(x,u)}$.

§. 64. Sollen die für die Ueberlebensversicherung eingezahlten Prämien zurückgezahlt werden, falls die zu versorgende Person vor dem Versorger stirbt, so findet man, den Formeln für die Ueberlebensrenten analog:

$$Cr_{tx(x,u)} = \frac{C_{tx(x,u)}}{1 - C_{tu(x,u)}} \tag{101}$$

und

$$Pr[C_{tx(x,u)}] = \frac{C_{tx(x,u)}}{\tfrac{1}{2}\left\{R_{(x,u)} + \frac{p-1}{p} V_{(x,u)} - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} V_{(x+1,u)} + \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} V_{(u+1,x)}\right\}} \tag{102}$$

Anhang I.

Terminliche Prämienzahlung.

Gewöhnlich gestatten die Versicherungsbanken ihren Versicherten die jährlichen Prämien in Theilraten zu zahlen. Da die jährlichen Prämien pränumerando zahlbar sind, so hat die Versicherungsbank das Recht, für den gestundeten Theil der Prämie Zinsen zu fordern, und dies geschieht hier auch gewöhnlich. Wir wollen hier die Formeln entwickeln, welche man anwenden mufs, um aus der jährlichen Prämie die halbjährlichen, vierteljährlichen und monatlichen Prämien zu berechnen, für den Fall, dafs bei einem gegebenen Zinsfufs die terminlichen Raten genau denselben Werth haben sollen, wie die jährlichen Prämien. Es bedeute P irgend eine jährliche Prämie, $P^{\frac{1}{2}}$ die entsprechende halbjährliche, $P^{\frac{1}{4}}$ die vierteljährliche und $P^{\frac{1}{12}}$ die monatliche Prämie.

I. Bei halbjährlicher Prämienzahlung wird die erste Prämie sogleich gezahlt; ihr Werth ist mithin $P^{\frac{1}{2}}$, die zweite Prämie wird aber erst nach einem Jahre gezahlt, ihr Werth ist also, wenn man zu $\pi\,\%$ jährlich discontirt, $\frac{P^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{\pi}{200}}$. (Vergleiche Abschnitt I., §. 7.)

Mithin ist
$$P^{\frac{1}{2}}+\frac{P^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{\pi}{200}}=P$$
oder
$$P^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{1+\frac{\pi}{200}}\right)=P.$$

Der Factor innerhalb der Klammer kann leicht auf die Form gebracht werden
$$1+\frac{1}{\frac{200+\pi}{200}}=1+\frac{200}{200+\pi}$$
$$=\frac{200+\pi+200}{200+\pi}$$
$$=\frac{400+\pi}{200+\pi},$$
und somit ist
$$P^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{400+\pi}{200+\pi}=P$$
oder
$$P^{\frac{1}{2}}=P\cdot\frac{200+\pi}{400+\pi}.$$

Anmerkung. Für $\pi=6$ ist: $\frac{200+\pi}{400+\pi}=\frac{206}{406}=0.5073892$

und $\log\frac{200+\pi}{400+\pi}=0.7053412-1.$

II. Bei vierteljährlicher Prämienzahlung hat man als Werthe der einzelnen Zahlungen für den Anfang des Jahres: $P^{\frac{1}{4}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\dfrac{\pi}{400}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\dfrac{\pi}{200}}$ und $\dfrac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\dfrac{3\pi}{400}}$. (Vergleiche Abschnitt I., §. 8.)

Die Summe dieser vier Werthe mufs gleich P sein und somit ist

$$P^{\frac{1}{4}}+\frac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\frac{\pi}{400}}+\frac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\frac{\pi}{200}}+\frac{P^{\frac{1}{4}}}{1+\frac{3\pi}{400}}=P$$

oder

$$P^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{\frac{400+\pi}{400}}+\frac{1}{\frac{200+\pi}{200}}+\frac{1}{\frac{400+3\pi}{400}}\right)=P$$

oder

$$P^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{400}{400+\pi}+\frac{200}{200+\pi}+\frac{400}{400+3\pi}\right)=P$$

oder

$$P^{\frac{1}{4}}=P\,.\,\frac{1}{1+\frac{400}{400+\pi}+\frac{200}{200+\pi}+\frac{400}{400+3\pi}}$$

Anmerkung. Für $\pi=6$ ist der Factor

$$\frac{1}{1+\frac{400}{400+\pi}+\frac{200}{200+\pi}+\frac{400}{400+3\pi}}=\frac{1}{1+\frac{400}{406}+\frac{200}{206}+\frac{400}{412}}$$
$$=0.2555562$$

und $\log\dfrac{1}{1+\frac{400}{400+\pi}+\frac{200}{200+\pi}+\frac{400}{400+3\pi}}=0.4074865-1.$

III. Bei monatlicher Prämienzahlung hat man als Werthe der einzelnen Zahlungen für den Anfang des Jahres: $P^{\frac{1}{12}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{12}}}{1+\dfrac{\pi}{1200}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{12}}}{1+\dfrac{2\pi}{1200}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{12}}}{1+\dfrac{3\pi}{1200}}$, $\dfrac{P^{\frac{1}{12}}}{1+\dfrac{4\pi}{1200}}$, etc. bis $\dfrac{P^{\frac{1}{12}}}{1+\dfrac{11\pi}{1200}}$. Die Summe dieser Werthe mufs wieder der jährlichen Prämie P gleich sein, mithin

$$P^{\frac{1}{12}}\left\{1+\frac{1}{1+\frac{\pi}{1200}}+\frac{1}{1+\frac{2\pi}{1200}}+\frac{1}{1+\frac{3\pi}{1200}}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+\frac{11\pi}{1200}}\right\}=P$$

oder

$$P^{\frac{1}{12}}=P\,.\,\frac{1}{1+\frac{1200}{1200+\pi}+\frac{1200}{1200+2\pi}+\frac{1200}{1200+3\pi}+\frac{1200}{1200+4\pi}+\ldots\ldots\frac{1200}{1200+11\pi}}$$

Anmerkung 1. Für $\pi = 6$ wird der Factor

$$\frac{1}{1+\frac{1200}{1200+\pi}+\frac{1200}{1200+2\pi}+\frac{1200}{1200+3\pi}+\ldots\ldots+\frac{1200}{1200+11\pi}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1200}{1206}+\frac{1200}{1212}+\frac{1200}{1218}+\frac{1200}{1224}+\ldots\ldots\frac{1200}{1266}}$$

$$= 0.08560084,$$

und der Logarithmus dieses Factors ist

$$\log 0.08560084 = 0.9324780 - 2.$$

Anmerkung 2. Werden die terminlichen Prämien nach der vorstehenden Art berechnet, so müssen für den Fall, dafs beim Tode des Versicherten noch nicht alle Prämienzahlungen für das laufende Versicherungsjahr geleistet sind, die noch fehlenden Beträge nachgezahlt resp. von der Versicherungssumme abgezogen werden. Soll dieser Abzug nicht stattfinden, so mufs man bei der Berechnung der halbjährlichen, vierteljährlichen etc. Prämien mit den Werthen der halbjährlich, vierteljährlich etc. zahlbaren Renten in die einmaligen Prämien dividiren.

Zweiter Theil.

Berechnung der Lebens- und Sterblichkeits-Erwartung und des Reservefonds.

Erster Abschnitt.

Berechnung der Lebens- und Sterblichkeits-Erwartung.

§. 65. Da von l_x $x$jährigen Personen nach der Sterblichkeitstafel nach einem Jahre l_{x+1} Personen leben, so wird die Wahrscheinlichkeit oder die Erwartung für eine Person, nach einem Jahre noch zu leben, ausgedrückt durch

$$\frac{l_{x+1}}{l_x}$$

d. h. die Anzahl der Lebenden des um 1 Jahr höheren Alters, dividirt durch die Anzahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters, und so lange dieser Bruch für eine Person $> \frac{1}{2}$ ist, ist es wahrscheinlich, dafs diese Person am Ende des Jahres noch lebt. Dagegen wird die Wahrscheinlichkeit, dafs eine $x$jährige Person im Laufe des nächsten Jahres sterbe, ausgedrückt durch

$$1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{t_{x+1}}{l_x}$$

d. h. die Zahl der Todten des um 1 Jahr höheren Alters dividirt durch die Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters.

Für eine Person von x Jahren ist also die Sterblichkeits-Erwartung für das nächste Jahr $\frac{t_{x+1}}{l_x}$; und sind m solcher Personen versichert, so ist für diese m Personen die Sterblichkeits-Erwartung $m \cdot \frac{t_{x+1}}{l_x}$.

Anmerkung 1. $\frac{t_{x+1}}{l_x}$ ist die Sterblichkeits-Erwartung für eine $x$jährige Person in Bezug auf ein Jahr. Soll diese Erwartung aber bestimmt werden für einen Theil des Jahres, so ist dieselbe gleich dem entsprechenden Theil der Sterblichkeits-Erwartung für das ganze Jahr, natürlich unter Voraussetzung, dafs die Todesfälle sich gleichmäfsig über das Jahr vertheilen.

Anmerkung 2. Multiplicirt man die Sterblichkeits-Erwartung mit der Versicherungssumme, so hat man die im Laufe des nächsten Jahres erwartungsmäfsig fällig werdende Summe.

§. 66. Dem Obigen entsprechend drückt $\frac{l_{x+2}}{l_x}$ die Wahrscheinlichkeit aus, daſs eine $x$jährige Person nach zwei Jahren noch lebe, und $\frac{l_{x+3}}{l_x}$, daſs sie nach drei Jahren noch lebe. Ist $\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2}$, d. h. ist die Wahrscheinlichkeit, daſs eine $x$jährige Person nach n Jahren noch lebe, $= \frac{1}{2}$, so ist es ebenso wahrscheinlich, daſs dieselbe vor Ablauf der n Jahre sterbe, als daſs sie am Ende dieser n Jahre noch lebe. Diesen Zeitraum von n Jahren nennt man deshalb die fernere wahrscheinliche Lebensdauer, während die ganze wahrscheinliche Lebensdauer für eine $x$jährige Person $(x+n)$ Jahre ist. Bedeutet also n die fernere wahrscheinliche Lebensdauer, so ist

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2},$$

oder

$$l_{x+n} = \frac{1}{2} \cdot l_x.$$

§. 67. Von der wahrscheinlichen Lebensdauer unterscheidet sich die mittlere Lebensdauer. Die l_x Personen vom Alter von x Jahren durchleben, unter der Voraussetzung, daſs der Tod am Ende des Jahres erfolgt, zuerst jede ein Jahr, oder alle zusammen l_x Jahre; die l_{x+1} nach einem Jahre übrig bleibenden Personen durchleben, während des zweiten Jahres, zusammen l_{x+1} Jahre, etc., so daſs die l_x Personen zusammen eine Anzahl von Jahren durchleben, die ausgedrückt wird durch die Summe

$$l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots\ldots,$$

welche Summe fortzusetzen ist bis zum höchsten Alter. Wir wollen diese Summe bezeichnen mit Σl_x. Da die l_x Personen eine Anzahl von Jahren $= \Sigma l_x$ durchleben, so kommen auf jede einzelne Person $\frac{\Sigma l_x}{l_x}$ Jahre, und diese Anzahl von Jahren nennt man die fernere mittlere Lebensdauer. Dieselbe ist jedoch nur unter der Bedingung richtig, daſs der Tod am Ende des Jahres erfolgt. In Wirklichkeit sind aber die Todesfälle mehr oder weniger gleichmäſsig über das ganze Jahr vertheilt, und wir kommen der Wirklichkeit bedeutend näher, wenn wir die Todesfälle in die Mitte der Jahre verlegen. Dann haben wir in der Summe der Jahre, welche die l_x $x$jährigen Personen noch zu leben haben, $\frac{l_x}{2}$ Jahre zuviel und die richtigere Summe der Jahre ist

$$\Sigma l_x - \frac{1}{2} l_x.$$

Dividiren wir diese Summe durch l_x, so erhalten wir als wahre oder corrigirte, fernere mittlere Lebensdauer für eine $x$jährige Person, bezeichnet durch LD_x,

$$LD_x = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2}. \tag{103}$$

Anmerkung. $\frac{\Sigma l_x}{l_x}$ entspricht dem Leibrentenwerthe $R_x = \frac{\Sigma \lambda_x}{\lambda_x}$, und der erste Ausdruck geht aus dem zweiten hervor, wenn ohne Zinsen gerechnet oder der Discontirungsfactor $p = 1$ gesetzt wird. Ebenso entspricht der Werth von $LD_x = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2}$ dem Werthe $R_x^{\overline{\infty}} = \frac{\Sigma \lambda_x}{\lambda_x} - \frac{1}{2}$. Bei diesem Werth der mittleren Lebensdauer sind die Todesfälle gleichmäſsig über das ganze Jahr vertheilt, und ebenso wird bei $R_x^{\overline{\infty}}$ das Beziehen der Rente über das ganze Jahr gleichmäſsig vertheilt gedacht.

§. 68. Bei zwei verbundenen Leben, das eine $x$jährig, das andere $u$jährig, wird die Erwartung, dafs beide nach einem Jahre noch leben, ausgedrückt durch $\frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$; denn von $l_x \cdot l_u$ solcher Paare existiren nach einem Jahre noch (§. 28) $l_{x+1} \cdot l_{u+1}$ vollständige Paare. Die Lebens-Erwartung für das Jahr, ausgedrückt durch $\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{u+1}}{l_u}$ ist somit gleich dem Product aus den Lebens-Erwartungen der beiden Personen, einzeln genommen. Die Erwartung, dafs nach einem Jahre nicht mehr beide Personen leben, mufs die vorige zu 1 ergänzen, da nach einem Jahre entweder beide noch am Leben sind, oder nicht mehr am Leben sind, und wie bekannt ergänzen sich zu 1 die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von zwei Ereignissen, von denen entweder das eine oder das andere eintreten mufs. Die Erwartung also, dafs nach einem Jahre nicht mehr beide Personen am Leben sind, ist $1 - \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$. Diese Erwartung ist aus folgenden drei Werthen zusammengesetzt: entweder stirbt die erste Person und die zweite lebt, die Erwartung dafür ist: $\frac{t_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{u+1}}{l_u}$, oder die erste lebt und die zweite stirbt, wofür die Erwartung: $\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{t_{u+1}}{l_u}$, oder endlich alle beide sterben, wofür die Erwartung: $\frac{t_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{t_{u+1}}{l_u}$.

Die Summe $\frac{t_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u} + \frac{l_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u} + \frac{t_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$ ist gleich dem obigen Werthe $1 - \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$, wie leicht erhellt.

Anmerkung. $1 - \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$ drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dafs das Paar, aus einer $x$jährigen und einer $u$jährigen Person innerhalb des nächsten Jahres sich auflöse, und ist dies Paar so versichert, dafs beim Tode des Zuerststerbenden die Summe S gezahlt werden soll, so ist die erwartungsmäfsig fällig werdende Summe $S\left(1 - \frac{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u}\right)$. Soll die versicherte Summe erst beim Tode des Zuletztsterbenden gezahlt werden, so ist nöthig, falls am Anfang des Jahres noch beide leben, dafs beide Personen in diesem Jahre sterben; die Erwartung dafür ist $\frac{t_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$ und $S \cdot \frac{t_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$ ist die erwartungsmäfsig fällig werdende Summe. Sobald aber die eine der beiden Personen gestorben ist, verwandelt sich die Versicherung in eine gewöhnliche Lebensversicherung auf ein einzelnes Leben und es finden die in §. 65 entwickelten Formeln Anwendung bei der Bestimmung der Sterblichkeits-Erwartung.

§. 69. Die Erwartung, dafs von zwei Personen, die eine $x$jährig, die andere $u$jährig, die erste von der zweiten innerhalb des ersten Jahres überlebt werde, setzt sich aus den beiden Erwartungen zusammen, dafs die erste Person im Laufe des ersten Jahres sterbe, die zweite aber nicht, wofür der Ausdruck ist $\frac{t_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{u+1}}{l_u}$, und dafs beide

Personen sterben, die erste aber früher, wofür der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \frac{t_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$ (vergleiche §. 38 und 62). Die verlangte Erwartung wird also ausgedrückt durch

$$\frac{t_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_x \cdot l_u} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t_{x+1} \cdot t_{u+1}}{l_x \cdot l_u}$$

$$= \frac{t_{x+1} (l_{u+1} + \frac{1}{2} t_{u+1})}{l_x \cdot l_u}$$

$$= \frac{t_{x+1} [l_{u+1} + \frac{1}{2} (l_u - l_{u+1})]}{l_x \cdot l_u}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t_{x+1} (l_u + l_{u+1})}{l_x \cdot l_u}$$

Anmerkung. Die mit dem vorstehenden Ausdruck multiplicirte Versicherungssumme giebt wieder die erwartungsmäſsig fällig werdende Summe.

§. 70. Zusatz. Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln genügen, um die bei der Versicherungs-Statistik vorkommenden Fragen in Bezug auf Sterblichkeits-Erwartung zu lösen. Es erhellt leicht, wie diese Formeln auch bei den Rentenversicherungen ihre Anwendung finden.

§. 71. Der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer analog findet man die fernere wahrscheinliche Verbindungsdauer n, wenn man n so bestimmt, daſs

$$\frac{l_{x+n} \cdot l_{u+n}}{l_x \cdot l_u} = \frac{1}{2}, \text{ oder daſs}$$

$$l_{x+n} \cdot l_{u+n} = \frac{1}{2} l_x \cdot l_u \text{ ist.}$$

§. 72. Die fernere mittlere Verbindungsdauer findet man, ebenfalls dem früheren analog, indem man die Summe

$$l_x \cdot l_u + l_{x+1} \cdot l_{u+1} + l_{x+2} \cdot l_{u+2} + \ldots\ldots$$
$$= \Sigma(l_x \cdot l_u)$$

dividirt durch $l_x \cdot l_u$, und die wahre, oder corrigirte fernere mittlere Verbindungsdauer, dargestellt durch $VD_{(x,u)}$ ist

$$VD_{(x,u)} = \frac{\Sigma(l_x \cdot l_u)}{l_x \cdot l_u} - \frac{1}{2} \tag{104}$$

§. 73. Die mittlere Ueberlebensdauer ist die Differenz zwischen der ferneren mittleren Lebensdauer und der ferneren mittleren Verbindungsdauer, und somit ist, wenn $\ddot{U}D_{(x,u)}$ die Ueberlebensdauer darstellt, und zwar um wieviel die jetzt $x$jährige Person die $u$jährige überleben wird:

$$\ddot{U}D_{x\,(x,u)} = LD_x - VD_{(x,u)} \text{ und entsprechend} \tag{105}$$
$$\ddot{U}D_{u\,(x,u)} = LD_u - VD_{(x,u)}$$

oder

$$\ddot{U}D_{x\,(x,u)} = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{\Sigma(l_x \cdot l_u)}{l_x \cdot l_u} \tag{105a}$$

und

$$\ddot{U}D_{u\,(x,u)} = \frac{\Sigma l_u}{l_u} - \frac{\Sigma(l_x \cdot l_u)}{l_x \cdot l_u}$$

in welchen Formeln sich die Correctur $\frac{1}{2}$ aufhebt.

Zweiter Abschnitt.

Berechnung der Reserven.

§. 74. Einleitung. Sowohl bei Kapital- als auch bei Rentenversicherungen genügt in den ersten Jahren ein Theil der Einzahlungen, um die fällig werdenden Versicherungen und Renten zu bezahlen und der Ueberschufs mufs für spätere Zahlungsfälle aufbewahrt werden. Wenn nun die bei der Versicherungsbank eingezahlten Gelder sich zu demselben Zinsfufs vermehrten, welcher der Prämienberechnung zu Grunde liegt, und wenn die Sterblichkeit der Versicherten sich genau der Sterblichkeits-Tabelle anschlösse, so brauchte die Reserve gar nicht berechnet zu werden. Von den einkommenden Geldern, bestehend aus den Prämien (und zwar Nettoprämien, d. h. so wie sich die Prämien nach der Berechnung ergeben, der Zuschlag, der gewöhnlich dazu genommen wird, müfste ausreichen, um die Verwaltungskosten zu decken) und den Zinsen des schon vorhandenen Reservekapitals würden die fälligen Versicherungssummen und Renten bezahlt und der Ueberschufs wieder zinstragend angelegt. Da aber die zinslich angelegten Gelder in der Regel höhere Zinsen tragen, als zur Ergänzung der Reserven nöthig sind (worin im Allgemeinen der Hauptverdienst der Versicherungsinstitute besteht und aufserdem sich auch hier und da Abweichungen von der Sterblichkeits-Tabelle zeigen können, so mufs die Reserve immer von Neuem berechnet werden, und wird auch bei allen reellen Versicherungsbanken am Ende jedes Jahres berechnet. Im Allgemeinen berechnet man die Reserve für jede einzelne Versicherung; bei der gewöhnlichen Lebensversicherung mit jährlicher Prämienzahlung kann man jedoch Gruppen von Versicherungen zusammenfassen, da hier gewöhnlich so viele Versicherungen laufen, dafs die Gruppirung sich verlohnt.

A. Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung.

§. 75. Sowohl bei Renten- als auch Kapitalversicherungen mit einmaliger Prämienzahlung ist die Reserve nach 1, 2 etc. Jahren gleich der einmaligen Prämie derselben Versicherung für um 1, 2 etc. Jahre ältere Personen. Ausgenommen hiervon sind jedoch diejenigen Versicherungen, bei denen, falls die versicherte Rente oder die versicherte Summe nicht zur Auszahlung kommt, eine Rückgewähr geleistet wird.

Wir wollen diesen Satz an einzelnen Versicherungsarten beweisen:

1. Die einmalige Prämie für eine Leibrente einer $x$jährigen Person beträgt $r_x = R_x - 1$, wenn die Rente postnumerando mit dem jährlichen Betrage 1 gezahlt wird; und es ist

$$r_x = \frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x} - 1$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_x - \lambda_x}{\lambda_x} = \frac{\Sigma\lambda_{x+1}}{\lambda_x}$$

Kaufen l_x Personen solche Renten, so zahlen dieselben ein $l_x \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+1}}{\lambda_x} = l_x \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+1}}{\frac{l_x}{p^x}}$

$$= p^x \, \Sigma \lambda_{x+1}$$

Diese Summe wächst durch die Zinsen in einem Jahre an auf

$$p \cdot p^x \cdot \Sigma \lambda_{x+1} = p^{x+1} \cdot \Sigma \lambda_{x+1}$$

Von diesem Kapital wird an jede der am Ende des Jahres noch lebenden l_{x+1} Personen die Rente 1 gezahlt; es bleibt also

$$\begin{aligned} & p^{x+1} \cdot \Sigma \lambda_{x+1} - l_{x+1} \\ &= p^{x+1} \cdot [\Sigma \lambda_{x+1} - \lambda_{x+1}] \\ &= p^{x+1} \cdot \Sigma \lambda_{x+2} \end{aligned}$$

Vertheilt man diese Summe auf die am Ende des ersten Jahres noch in Kraft bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so kommt auf jede einzelne Versicherung:

$$\frac{p^{x+1} \cdot \Sigma \lambda_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{\Sigma \lambda_{x+2}}{\lambda_{x+1}} = r_{x+1}$$

Bezeichnet $\underset{1}{R}_{es}(r_x)$ die Reserve der Leibrentenversicherung nach einem Jahre, so ist

$$\underset{1}{R}_{es}(r_x) = r_{x+1}$$

Bedeutet $\underset{2}{R}_{es}$ entsprechend die Reserve nach 2 Jahren, $\underset{3}{R}_{es}$ nach 3 Jahren etc., so ist

$$\begin{aligned} \underset{2}{R}_{es}(r_x) &= \underset{1}{R}_{es}(r_{x+1}) = r_{x+2} \\ \underset{3}{R}_{es}(r_x) &= r_{x+3} \text{ etc.} \\ \underset{n}{R}_{es}(r_x) &= r_{x+n} \end{aligned}$$

2. Die einmalige Zahlung für eine aufgeschobene Rente haben wir bezeichnet mit

$$\underset{y}{R}_x,$$

wo x das Alter des Versicherten und y die Anzahl der Jahre bis zum Beginn der Rentenzahlung bedeutet, und es war

$$\underset{y}{R}_x = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

Unter der Voraussetzung, dafs l_x solcher Versicherungen geschlossen werden, wird bei der Bank eingezahlt die Summe

$$l_x \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_x} = p^x \cdot \Sigma \lambda_{x+y}$$

Diese Summe wächst durch die Verzinsung in einem Jahre an zu

$$p \cdot p^x \cdot \Sigma \lambda_{x+y} = p^{x+1} \cdot \Sigma \lambda_{x+y},$$

und vertheilt man diese Summe auf die am Ende des Jahres bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so ist, wenn hier die Reserve bezeichnet wird durch $\underset{1}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x)$, $\underset{2}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x)$ etc.

$$\begin{aligned} \underset{1}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) &= \frac{p^{x+1} \, \Sigma \lambda_{x+y}}{l_{x+1}} = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} \\ &= \underset{y-1}{R}_{x+1} \end{aligned}$$

d. h. die Reserve nach einem Jahre ist hier gleich der einmaligen Zahlung, welche eine um 1 Jahr ältere Person für eine Rente mit einer um 1 Jahr kürzeren Aufschubszeit zu leisten hat. Ebenso findet man

$$\underset{2}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = \underset{y-2}{R}_{x+2}$$

$$\underset{3}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = \underset{y-3}{R}_{x+3} \text{ etc. und}$$

für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = \underset{y-n}{R}_{x+n}$$

Ist aber $n = y$, so ist

$$\underset{y}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = R_{x+y}$$

d. h. R_{x+y} ist die Reserve am Ende des $y$ten Jahres, wenn die erste Rentenzahlung noch nicht geleistet ist; ist diese aber schon geleistet, so ist

$$\underset{y}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = r_{x+y}$$

Ist ferner $n > y$, so ist $\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = R_{x+n}$

vor der Rentenzahlung am Ende des $n$ten, oder am Anfang des $(n+1)$sten Jahres, dagegen nach dieser Zahlung ist

$$\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}_x) = r_{x+n}.$$

3. Die einmalige Zahlung für die Versicherungssumme 1, zahlbar nach dem Tode des Versicherten, ist

$$C_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} = 1 - \frac{p-1}{p} R_x$$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung

$$l_x \,.\, \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_x} = p^x \,.\, \Sigma \tau_{x+1}$$

Diese Summe vermehrt sich durch Verzinsung in einem Jahre zu

$$p \,.\, p^x \,.\, \Sigma \tau_{x+1} = p^{x+1} \,.\, \Sigma \tau_{x+1}$$

Von dieser Summe geht ab t_{x+1} für die im ersten Jahre eintretenden Sterbefälle, deren Anzahl t_{x+1} ist, und wovon jeder einzelne die Summe 1 fällig macht. Es bleibt die Summe

$$p^{x+1} \,.\, \Sigma \tau_{x+1} - t_{x+1} = p^{x+1} \left(\Sigma \tau_{x+1} - \frac{t_{x+1}}{p^{x+1}} \right)$$
$$= p^{x+1} (\Sigma \tau_{x+1} - \tau_{x+1})$$
$$= p^{x+1} \,.\, \Sigma \tau_{x+2}$$

Vertheilt man diese Summe auf die am Ende des Jahres bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so ist bei ähnlicher Bezeichnung wie oben

$$\underset{1}{R}_{es}(C_x) = p^{x+1} \,.\, \frac{\Sigma \tau_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{\Sigma \tau_{x+2}}{\frac{l_{x+1}}{p^{x+1}}}$$

$$= \frac{\Sigma \tau_{x+2}}{\lambda_{x+1}}, \text{ also}$$

$$\underset{1}{R}_{es}(C_x) = C_{x+1}$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\underset{2}{R}_{es}(C_x) = C_{x+2}$$

$$\underset{3}{R}_{es}(C_x) = C_{x+3}, \text{ etc.}$$

$$\underset{n}{R}_{es}(C_x) = C_{x+n}.$$

4. Die einmalige Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar, wenn der Versicherte $x+y$ Jahr alt ist oder nach dem Tode desselben, wenn er früher stirbt, ist nach Formel (57)

$$^{y}\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_x}$$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung

$$l_x \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_x} = p^x\,(\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y})$$

Durch Multiplication mit p erhält man den Werth dieser Summe nach einem Jahre, und zieht man davon für die in diesem Jahre eintretenden Sterbefälle die Summe t_{x+1} ab und vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so ergiebt sich:

$$\underset{1}{R}_{es}(^{y}\mathfrak{R}_x) = \frac{p^{x+1}\,(\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}) - t_{x+1}}{l_{x+1}}$$

$$= \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y} - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}}$$

$$= \frac{\Sigma\tau_{x+2} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}}$$

$$= {}^{y-1}\mathfrak{R}_{x+1}.$$

Ebenso findet man

$$\underset{2}{R}_{es}(^{y}\mathfrak{R}_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+3} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+2}}$$

$$= {}^{y-2}\mathfrak{R}_{x+2}, \text{ und}$$

für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}(^{y}\mathfrak{R}_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}}$$

$$= {}^{y-n}\mathfrak{R}_{x+n};$$

und ist $n = y$, so ist

$$\underset{y}{R}_{es}(^{y}\mathfrak{R}_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1} - \Sigma\tau_{x+y+1} + \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}$$

$$= 1.$$

Dies Resultat mufs erscheinen, da, falls der Versicherte so lange lebt, nach y Jahren die Summe 1 gezahlt werden mufs.

5. Die einmalige Prämie für die kurze Lebensversicherung auf y Jahre haben wir gefunden [Formel (49)]

$$^{y}C_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}$$

Hier findet man auf ähnliche Weise wie bisher:

$$\underset{1}{R}_{es}(^{y}C_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+2} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+1}}$$

$$= {}^{y-1}C_{x+1},$$

$$\underset{2}{R}_{es}(^{y}C_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+3} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+2}}$$

$$= {}^{y-2}C_{x+2},$$

und wenn $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^{y}C_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}}$$
$$= {}^{y-n}C_{x+n}$$

und für $n = y$

$$\underset{y}{R}_{es}({}^{y}C_x) = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+y}}$$
$$= 0.$$

6. Die einmalige Zahlung für die Ueberlebensrente ist nach Formel (72)

$$R_{tx(u)} = R_u - R_{(x,u)}$$

Bei $l_x \,.\, l_u$ solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung

$$l_x \,.\, l_u \,.\, R_{tx(u)} = l_x \,.\, l_u \,.\, R_u - l_x \,.\, l_u \,.\, R_{(x,u)}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit p, so hat man den Werth dieser Summe nach einem Jahre, und da

$$R_u = \frac{\Sigma\lambda_u}{\lambda_u}$$

und

$$R_{(x,u)} = \frac{\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u)}{l_x \,.\, \lambda_u}$$

ist, so ist dieser Werth nach einem Jahre

$$l_x \,.\, l_u \,.\, p\,\frac{\Sigma\lambda_u}{\lambda_u} - l_x \,.\, l_u \,.\, p\,\frac{\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u)}{l_x \,.\, \lambda_u}$$
$$= l_x \,.\, p^{u+1}\,\Sigma\lambda_u - p^{u+1} \,.\, \Sigma(l_x \,.\, \lambda_u)$$

Von $l_x \,.\, l_u$ Paaren (die $x$jährigen sind die Versorger und die $u$jährigen die zu versorgenden Personen) sterben $t_{x+1} \,.\, l_u$ Versorger und von diesen Versorgern zugehörigen Personen bleiben $t_{x+1} \,.\, l_{u+1}$ zu versorgende Personen am Leben. Für jede dieser Personen beginnt eine Leibrente, deren Werth $R_{(u+1)}$ ist. Im Ganzen geht also von der obigen Summe der Werth ab:

$$t_{x+1} \,.\, l_{u+1} \,.\, R_{u+1} = t_{x+1} \,.\, l_{u+1} \,.\, \frac{\Sigma\lambda_{u+1}}{\lambda_{u+1}}$$
$$= t_{x+1} \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_{u+1}$$

Setzen wir in den vorstehenden Ausdruck

$$t_{x+1} = l_x - l_{x+1},$$

so wird derselbe

$$l_x \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_{u+1} - l_{x+1} \,.\, p^{u+1}\,\Sigma\lambda_{u+1}$$
$$= l_x \,.\, p^{u+1} \,.\, (\Sigma\lambda_u - \lambda_u) - l_{x+1} \,.\, p^{u+1}\,\Sigma\lambda_{u+1}$$
$$= l_x \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_u - l_x \,.\, \lambda_u \,.\, p^{u+1} - l_{x+1} \,.\, p^{u+1}\,\Sigma\lambda_{u+1}$$

Subtrahiren wir nun diesen Ausdruck von der um ein Jahr aufgezinsten Gesammteinzahlung, so bleibt

$$l_x \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_u - p^{u+1} \,.\, \Sigma(l_x \,.\, \lambda_u) - l_x \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_u + l_x \,.\, \lambda_u \,.\, p^{u+1} + l_{x+1} \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_{u+1}$$
$$= l_{x+1} \,.\, p^{u+1} \,.\, \Sigma\lambda_{u+1} - p^{u+1}\,[\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u) - l_x \,.\, \lambda_u]$$

Nun ist

$$\Sigma(l_x \,.\, \lambda_u) = l_x \,.\, \lambda_u + \Sigma(l_{x+1} \,.\, \lambda_{u+1}),$$

mithin wird aus dem obigen Ausdruck

$$l_{x+1} \,.\, p^{u+1}\,\Sigma\lambda_{u+1} - p^{u+1}\,\Sigma(l_{x+1} \,.\, \lambda_{u+1})$$

Vertheilt man diese Summe auf die nach einem Jahre noch vollständig bestehenden $l_{x+1} \cdot l_{u+1}$ Paare, so ergiebt sich

$$\underset{1}{R}_{es}(R_{tx(u)} = p^{u+1} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{u+1}}{l_{u+1}} - p^{u+1} \cdot \frac{\Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1})}{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}$$

$$= \frac{\Sigma \lambda_{u+1}}{\lambda_{u+1}} - \frac{\Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1})}{l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}}$$

$$= R_{u+1} - R_{(x+1, u+1)}$$

und somit
$$\underset{1}{R}_{es}(R_{tx(u)}) = R_{tx+1(u+1)},$$
wenn am Ende des Jahres beide Personen, Versorger und zu versorgende Person noch leben; lebt nur noch die letzte, so ist, wie schon oben erwähnt, die Reserve $= R_{(u+1)}$ und zwar vor Leistung der ersten Rentenzahlung, dagegen $= r_{u+1}$ unmittelbar nach derselben.

Ebenso findet man für die Versicherungen, wo am Ende des zweiten Jahres noch beide Personen leben,

$$\underset{2}{R}_{es}(R_{tx(u)}) = R_{(u+2)} - R_{(x+2, u+2)}$$

$$= R_{tx+2(x+2)} \text{ etc. und}$$

$$\underset{n}{R}_{es}(R_{tx(u)}) = R_{(u+n)} - R_{(x+n, u+n)}$$

$$= R_{tx+n(u+n)}$$

7. Die einmalige Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar nach dem Tode des von Versicherten Zuerststerbenden ist

$$C_{t_1(x, u)} = 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x, u)}$$

Bei $l_x \cdot l_u$ Versicherungen beträgt die Gesammteinzahlung, und zwar um 1 Jahr aufgezinst,

$$l_x \cdot l_u \cdot p - \frac{p-1}{p} \cdot p \cdot l_x \cdot l_u \cdot R_{(x, u)}$$

$$= l_x \cdot l_u \cdot p - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot \Sigma(l_x \cdot l_u)$$

Im ersten Jahre erlöschen $(l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1})$ Paare, sei es durch den Tod des einen oder der beiden Versicherten. Am Ende des ersten Jahres ist mithin zu zahlen die Versicherungssumme $\quad l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1}$

und es bleibt somit übrig

$$l_x \cdot l_u \cdot p - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot \Sigma(l_x \cdot \lambda_u) - l_x \cdot l_u + l_{x+1} \cdot l_{u+1}$$

$$= l_{x+1} \cdot l_{u+1} - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot \Sigma(l_x \cdot \lambda_u) + l_x \cdot l_u (p-1)$$

$$= l_{x+1} \cdot l_{u+1} - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot \Sigma(l_x \cdot \lambda_u) + \frac{p-1}{p} p^{u+1} \cdot l_x \cdot \lambda_u$$

$$= l_{x+1} \cdot l_{u+1} - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot [\Sigma(l_x \cdot \lambda_u) - l_x \cdot \lambda_u]$$

$$= l_{x+1} \cdot l_{u+1} - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \cdot \Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1})$$

Vertheilt man diese Summe unter die $l_{x+1} \cdot l_{u+1}$ noch bestehenden Versicherungen, so bleibt

$$\underset{1}{R}_{es}(C_{t,(x,u)} = 1 - \frac{p-1}{p} \cdot p^{u+1} \frac{\Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1})}{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} \frac{\Sigma(l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1})}{l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+1,\, u+1)}$$

mithin

$$\underset{1}{R}_{es}\,[C_{t,(x,u)}] = C_{t,(x+1,\, u+1)}$$

Ebenso findet man

$$\underset{2}{R}_{es}\,[C_{t,(x,u)}] = C_{t,(x+2,\, u+2)}$$

und

$$\underset{n}{R}_{es}\,[C_{t,(x,u)}] = C_{t,(x+n,\, u+n)}$$

§. 76. Der oben ausgesprochene und an den 7 Beispielen wohl genügend erwiesene Satz über die Reserven bei den Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung (wobei diejenigen Versicherungen ausgeschlossen sind, bei denen eine Rückgewähr der eingezahlten Prämie geleistet wird, falls die versicherte Rente oder die Summe nicht zur Auszahlung kommt), läſst sich auch kürzer so ableiten.

Ist eine Versicherung mit einmaliger Prämienzahlung abgeschlossen, so muſs die Versicherungsbank offenbar so viel von dem eingezahlten Kapitale und den von demselben herrührenden Zinsen und Zinseszinsen reserviren, daſs stets der volle Werth der Versicherung dadurch gedeckt ist. Und dieser Werth ist offenbar diejenige Prämie, welche die Versicherungsbank an eine zweite Versicherungsbank, die zu denselben Prämien versichert, wie die erste, zahlen müſste, wenn sie dieser zweiten die Versicherung und die damit verbundenen Verpflichtungen überlassen wollte; und diese Prämie wäre offenbar die entsprechende einmalige Prämie für dasjenige Alter, welches die Versicherten beim Abschluſs dieser Rückversicherung hätten. Der Werth einer Versicherung, oder die Reserve bei einmaliger Prämienzahlung nach einem Jahre ist also die einmalige Prämie für dieselbe Versicherung bei einem um ein Jahr höheren Alter des oder der Versicherten, nach zwei Jahren die einmalige Prämie für um zwei Jahre ältere Versicherte etc.

Oder man kann so sagen: Nach n Jahren muſs die Versicherungsbank von der eingezahlten Prämie und den darauf fallenden Zinsen und Zinseszinsen noch so viel reserviren, daſs sie im Stande ist, alle Zahlungen, die sie rechnungsmäſsig zu erwarten hat, zu leisten; und offenbar genügt bei $(x+n)$jährigen Versicherten für jeden einzelnen Versicherten die seiner Versicherung entsprechende einmalige Prämie für das Alter von $(x+n)$ Jahren ebensogut, wie beim Abschluſs der Versicherung die Bank durch die Prämie des $x$jährigen in den Stand gesetzt werden sollte, allen Zahlungen zu genügen.

Wir haben die obige Entwickelung vorausgeschickt, um zugleich zu zeigen, daſs die Versicherungsbank diese Reserve übrig behält, nachdem die erwartungsmäſsig fällig gewordenen Renten oder Versicherungssummen gezahlt sind.

§. 77. Die einmalige Prämie für die aufgeschobene Rente mit Rückgewähr der eingezahlten Prämie, falls der Versicherte innerhalb der Aufschubszeit stirbt, ist

$$\underset{y}{R}r_x = \frac{\underset{y}{R}_x}{1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}}$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}$$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung $l_x \,.\, \underset{y}{R}r_x$, welche in einem Jahre anwächst zu $l_x \,.\, p\,\underset{y}{R}r_x$. In diesem Jahre sterben von den Versicherten t_{x+1}, mithin beträgt die Rückgewähr $t_{x+1} \,.\, \underset{y}{R}r_x$ (da die Prämien ohne Zinsen zurückgegeben werden). Vertheilt man das übrig bleibende Kapital unter die noch bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so ergiebt sich

$$\underset{1}{R}_{es}[\underset{y}{R}r_x] = \frac{l_x \,.\, p\,\underset{y}{R}r_x - t_{x+1} \,.\, \underset{y}{R}r_x}{l_{x+1}}$$

$$= \frac{\lambda_x - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

Die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres

$$l_x \,.\, p \,.\, \underset{y}{R}r_x - t_{x+1} \,.\, \underset{y}{R}r_x = (l_x \,.\, p - t_{x+1})\, \underset{y}{R}r_x$$

wächst in dem zweiten Jahre an zu

$$(l_x \,.\, p - t_{x+1})\, p \,.\, \underset{y}{R}r_x = [l_x \,.\, p^2 - t_{x+1} \,.\, p]\, \underset{y}{R}r_x$$

Wegen der im zweiten Jahre erfolgenden t_{x+2} Todesfälle wird in diesem Jahre als Rückgewähr gezahlt $t_{x+2} \,.\, \underset{y}{R}r_x$ und somit bleibt als Gesammtreserve

$$[l_x \,.\, p^2 - t_{x+1} \,.\, p - t_{x+2}] \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

Wird diese Summe auf die am Ende des zweiten Jahres noch bestehenden l_{x+2} Versicherungen vertheilt, so ergiebt sich

$$\underset{2}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \frac{l_x \,.\, p^2 - t_{x+1} \,.\, p - t_{x+2}}{l_{x+2}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

$$= \frac{\lambda_x - \tau_{x+1} - \tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

Ebenso findet man

$$\underset{3}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \frac{\lambda_x - (\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \tau_{x+3})}{\lambda_{x+3}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

$$= \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+4})}{\lambda_{x+3}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

etc. und für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} \,.\, \underset{y}{R}r_x \qquad (105)$$

und für $n = y$

$$\underset{y}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+y}} \,.\, \underset{y}{R}r_x$$

Da nun $\underset{y}{R}r_x = \dfrac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}$, so ist

$$\underset{y}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+y}} \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}$$

$$= R_{(x+y)}$$

Dies Resultat war vorauszusehen, da die nach y Jahren noch bestehenden Versicherungen sich alsdann in gewöhnliche Leibrentenversicherungen verwandeln.

Anmerkung. Da mit Anwendung der Formel (28)

$$\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1}) = \lambda_{x+n} + \frac{p-1}{p}[\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}]$$

so kann man auch schreiben:

$$\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \left\{1 + \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\lambda_{x+n}}\right\} \cdot \underset{y}{R}r_x$$

Ferner ist $\dfrac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} = \dfrac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left(1 - \dfrac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1}}{\lambda_x}\right) = \dfrac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}(1 - {}^nC_x)$

§. 78. I. Ebenso erscheint der Factor

$$\frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}}$$

$$= 1 + \frac{p-1}{p}\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\lambda_{x+n}}$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}(1 - {}^nC_x)$$

bei der Reserve für die aufgeschobene Lebensversicherung (mit Carenzzeit) mit Rückgewähr und es ist bei ähnlicher Entwickelung wie oben für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}_yCr_x) = \frac{\lambda_x - [\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1}]}{\lambda_{x+1}} \cdot {}_yCr_x \tag{106}$$

und da ${}_yCr_x = \dfrac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - [\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}]}$ ist, so wird für $n = y$

$$\underset{y}{R}_{es}({}_yCr_x) = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+y}} \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})} = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+y}} = C_{x+y}$$

II. Derselbe Factor

$$\frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} = 1 + \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\lambda_{x+n}}$$

erscheint auch bei der Reserve der Kapitalversicherungen auf den Lebensfall mit Rückgewähr. Die einmalige Prämie ist hier

$${}^yClr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}$$

und es ist, bei ähnlicher Entwickelung wie oben, für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^yClr_x) = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} \cdot {}_yClr_x, \tag{107}$$

und für $n = y$

$$\underset{y}{R}_{es}({}_yClr_x) = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}} = 1.$$

§. 79. Die Resultate der beiden vorhergehenden Paragraphen lassen sich auch auf folgende Weise herleiten:

1) Besteht die Versicherung einer um y Jahre aufgeschobenen Leibrente mit einmaliger Zahlung und Rückgewähr n Jahre, wo $n < y$, so besteht die Reserve aus zwei Theilen nach den Leistungen, welche die Versicherungsbank zu erwarten hat. Einmal hat sie eine nach $(y - n)$ Jahren beginnende Leibrente für einen $(x + n)$jährigen Versicherten zu erwarten (wenn der Versicherte x Jahre alt war beim Abschlufs der Versicherung). Zweitens hat sie, falls der Versicherte innerhalb der von der Aufschubszeit noch übrigen $(y - n)$ Jahre stirbt, die Rückgewähr zu leisten. Diese Leistung ist offenbar dieselbe, wie bei einer Lebensversicherung auf kurze Zeit, nämlich auf $(y - n)$ Jahre für einen $(x + n)$ Jahre alten Versicherten, nur dafs nicht die Versicherungssumme 1, sondern $\underset{y}{R}r_x$ beim Todesfall zu zahlen ist. Der Werth dieser zweiten Leistung ist also ${}^{y-n}C_{x+n} \cdot \underset{y}{R}r_x$, während die erste Leistung $\underset{y-n}{R}r_{x+n}$ ist. Man findet somit für die Reserve, wenn $n < y$:

$$\underset{n}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \underset{y-n}{R}_{x+n} + {}^{y-n}C_{x+n} \cdot \underset{y}{R}r_x \tag{105a}$$

Dafs der hier gefundene Werth der Reserve identisch ist mit dem in §. 77 abgeleiteten, ergiebt sich leicht. Es ist nämlich:

$$\underset{y-n}{R}_{x+n} = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}}, \text{ und da}$$

$$\underset{y}{R}r_x = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}$$

so ist

$$\underset{y-n}{R}_{x+n} = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} \cdot \underset{y}{R}r_x$$

Ferner ist

$${}^{y-n}C_{x+n} = \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}}$$

Mithin ergiebt sich aus Formel (105a)

$$\underset{y}{R}_{es}(\underset{y}{R}r_x) = \left\{\frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}}\right\} \underset{y}{R}r_x$$

$$= \frac{\lambda_x - \Sigma\tau_{x+1} + \Sigma\tau_{x+y+1} + \Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}} \cdot \underset{y}{R}r_x$$

$$= \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} \cdot \underset{y}{R}r_x,$$

womit die Identität mit der obigen Formel nachgewiesen ist.

2. Bei der aufgeschobenen Lebensversicherung mit Rückgewähr findet man ebenso, wenn $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}_yCr_x) = {}_{y-n}C_{x+n} + {}^{y-n}C_{x+n} \cdot {}_yCr_x \tag{106a}$$

Hier ist

$${}_{y-n}C_{x+n} = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}}$$

und da
$$ {}_yCr_x = \frac{\Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})} $$

so ist
$$ {}_{y-n}C_{x+n} = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} \, {}_yCr_x $$

also
$$ \underset{n}{R}_{es}({}_yCr_x) = \left\{ \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}} \right\} {}_yCr_x $$
$$ = \frac{\lambda_x - \Sigma\tau_{x+1} + \Sigma\tau_{x+y+1} + \Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}} \, {}_yCr_x $$
$$ = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} \, {}_yCr_x $$

Also auch hier sind die beiden Formeln für die Reserven identisch.

3. Bei einer Versicherung auf den Lebensfall mit einmaliger Prämienzahlung und Rückgewähr findet man ebenso, wenn $n < y$,
$$ \underset{n}{R}_{es}({}^yClr_x) = {}^{y-n}Cl_{x+n} + {}^{y-n}C_{x+n} \,.\, {}^yClr_x \tag{107 a} $$

Hier ist
$$ {}^{y-n}Cl_{x+n} = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} $$

und da
$$ {}^yClr_x = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}, \text{ so ist wieder} $$
$$ {}^{y-n}Cl_{x+n} = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} \,.\, {}^yClr_x; $$

also
$$ \underset{n}{R}_{es}({}^yClr_x) = \left\{ \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1})}{\lambda_{x+n}} + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}} \right\} {}^yClr_x $$
$$ = \frac{\lambda_x - \Sigma\tau_{x+1} + \Sigma\tau_{x+y+1} + \Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+1}} \,.\, {}^yClr_x $$
$$ = \frac{\lambda_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}} \,.\, {}^yClr_x $$

§. 80. Bei der kurzen Lebensversicherung mit Rückgewähr ist die einmalige Prämie
$$ {}_yCr_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - \lambda_{x+y}}. $$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung $l_x \,.\, {}^yCr_x$, die in einem Jahre anwächst zu $l_x \,.\, p \,.\, {}^yCr_x$. Von dieser Summe geht die Summe t_{x+1} ab für die in diesem Jahre eintretenden Sterbefälle und es bleibt als Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres
$$ l_x \,.\, p \,.\, {}^yCr_x - t_{x+1}. $$

Vertheilt man diese Summe auf die am Ende des Jahres noch bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so ergiebt sich:
$$ \underset{1}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{l_x \,.\, p \,.\, {}^yCr_x - t_{x+1}}{l_{x+1}} $$
$$ = \frac{\lambda_x \,.\, {}^yCr_x - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}} $$
$$ = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} \left({}^yCr_x - \frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x} \right) $$
$$ = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} ({}^yCr_x - {}^1C_x) $$

Die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres $l_x \cdot p \cdot {}^yCr_x - t_{x+1}$ wächst im zweiten Jahre an zu $l_x \cdot p^2 \cdot {}^yCr_x - t_{x+1} \cdot p$, hiervon geht ab die Versicherungssumme t_{x+2} für die im zweiten Jahre eintretenden Todesfälle, und es bleibt $l_x \cdot p^2 \cdot {}^yCr_x - t_{x+1} \cdot p - t_{x+2}$. Wird diese Summe auf die am Ende des zweiten Jahres noch bestehenden l_{x+2} Versicherungen vertheilt, so ergiebt sich

$$\underset{2}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{l_x \cdot p^2 \cdot {}^yCr_x - t_{x+1} - t_{x+2}}{l_{x+2}}$$

$$= \frac{\lambda_x \cdot {}^yCr_x - \tau_{x+1} - \tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}}$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+2}} \cdot \left({}^yCr_x - \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2}}{\lambda_x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+2}} ({}^yCr_x - {}^2C_x)$$

Ebenso findet man

$$\underset{3}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+3}} ({}^yCr_x - {}^3C_x)$$

und allgemein für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} ({}^yCr_x - {}^nC_x) \tag{108}$$

Für $n = y$ entsteht

$$\underset{y}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} ({}^yCr_x - {}^yC_x)$$

Da

$${}^yCr_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - \lambda_{x+y}}$$

und

$${}^yC_x = \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x},$$

so folgt

$${}^yC_x = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^yCr_x$$

und somit ist

$$\underset{y}{R}_{es}({}^yCr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_x - \lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right) \cdot {}^yCr_x$$

$$= {}^yCr_x \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \left(1 - 1 + \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right)$$

$$= {}^yCr_x \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}, \text{ d. h.}$$

$$\underset{y}{R}_{es}({}^yCr_x) = {}^yCr_x,$$

welches Resultat erscheinen mufs, da die nach y Jahren noch lebenden Versicherten die eingezahlte Prämie ${}^yCr_x$ zurückerhalten.

§. 81. Man kann hier die Reserve auch so construiren: Besteht eine kurze Lebensversicherung auf y Jahre schon n Jahre, wo $n < y$, so ist wegen der noch zu erwartenden Todesfälle der eine Theil der Reserve ${}^{y-n}C_{x+n}$, und wegen der nach $(y-n)$

Jahren fälligen Rückgewähr der andere Theil $\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} \cdot {}^{y}Cr_x = {}^{y-n}Cl_{x+n} \cdot {}^{y}Cr_x$, und somit ist:

$$\underset{n}{R}_{es}({}^{y}Cr_x) = {}^{y-n}C_{x+n} + \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} \cdot {}^{y}Cr_x \tag{108a}$$
$$= {}^{y-n}C_{x+n} + {}^{y-n}Cl_{x+n} \cdot {}^{y}Cr_x.$$

Dafs der vorstehende Ausdruck identisch ist mit

$$\underset{n}{R}_{es}({}^{y}Cr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left[{}^{y}Rr_x - {}^{n}C_x\right]$$

erhellt leicht auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} \cdot {}^{y}Cr_x + {}^{y-n}C_{x+n} = \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} \cdot {}^{y}Cr_x + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_{x+n}}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + \frac{\Sigma\tau_{x+1}}{\lambda_x} - \frac{\Sigma\tau_{x+1}}{\lambda_x} + \frac{\Sigma\tau_{x+n+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1}}{\lambda_x}\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + \frac{\lambda_x - \lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x - \lambda_{x+y}} - {}^{n}C_x\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + \left(1 - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right){}^{y}Cr_x - {}^{n}C_x\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left\{\frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x + {}^{y}Cr_x - \frac{\lambda_{x+y}}{\lambda_x} \cdot {}^{y}Cr_x - {}^{n}C_x\right\}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left({}^{y}Cr_x - {}^{n}C_x\right) \text{ q. e. d.}$$

§. 82. Die einmalige Prämie für die Wittwenpension mit Rückgewähr ist nach Formel (75 und 75b)

$$\underset{t(x)}{R}_{r(u)} = \frac{R_{tx(u)}}{1 - C_{tu(x,u)}}$$
$$= \frac{R_u - R_{(x,u)}}{1 - \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} R_{(x,u+1)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} R_{(x+1,u)}\right\}}$$

Bei $l_x \cdot l_u$ solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung $l_x \cdot l_u \cdot \underset{tx}{R}_{r(u)}$, welche in einem Jahre anwächst zu $l_x \cdot l_u \cdot \underset{tx}{R}_{r(u)} \cdot p$. In diesem Jahre sterben von den Frauen $l_x \cdot t_{u+1}$ und von den diesen Frauen zugehörigen Männern leben am Ende des Jahres noch $l_{x+1} \cdot t_{u+1}$, während davon in dem Jahre sterben $t_{x+1} \cdot t_{u+1}$. Nach unserer, schon früher aufgestellten Annahme stirbt von diesen die Hälfte vor ihren Frauen, die Hälfte nach denselben. Die Versicherungsbank hat also an $l_{x+1} \cdot t_{u+1} + \frac{1}{2} \cdot t_{x+1} \cdot t_{u+1}$ Männer die Rückgewähr zu leisten; dieselbe beträgt also

$$(l_{x+1} + \tfrac{1}{2}\, t_{x+1})\, t_{u+1} \cdot \underset{tx}{R}_{r(u)}$$
$$= \left[l_{x+1} + \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1})\right](l_u - l_{u+1}) \cdot \underset{tx}{R}_{r(u)}$$
$$= \frac{l_x + l_{x+1}}{2}(l_u - l_{u+1})\, \underset{tx}{R}_{r(u)}$$

Ferner sterben in dem ersten Jahre im Ganzen $t_{x+1} . l_u$ Männer, und von den diesen zugehörigen Wittwen leben am Ende des Jahres noch $t_{x+1} . l_{u+1}$ Wittwen. Für jede derselben hat die Bank eine sofort beginnende Rente zu zahlen; der Gesammtwerth dieser Renten, d. h. $t_{x+1} . l_{u+1} . R_{(u+1)}$, geht ebenfalls von der Gesammteinzahlung ab, und somit beträgt die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres:

$$\underset{tx}{R}_{r(u)}\, l_x . l_u . p - \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})(l_u - l_{u+1})\, \underset{tx}{R}_{(u)} - t_{x+1} . l_{u+1}\, R_{(x+1)}$$

$$= \underset{tx}{R}_{r(u)}\left[l_x . l_u . p - \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})(l_u - l_{u+1})\right] - (l_x - l_{x+1})\, l_{u+1}\, R_{u+1}$$

Vertheilt man diese Summe auf die noch bestehenden $l_{x+1} . l_{u+1}$ Versicherungen, so ergiebt sich

$$\underset{1}{R}_{es}\left[\underset{tx}{R}_{r(u)}\right] = \frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{l_{x+1} . l_{u+1}}\left[l_x . l_u . p - \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})(l_u - l_{u+1})\right] - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_{x+1}} R_{u+1}$$

$$= \frac{\underset{tx}{R}_{(u)}}{l_{x+1} . \lambda_{u+1}}\left\{l_x . \lambda_u - \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})\left(\frac{\lambda_u}{p} - \lambda_{u+1}\right)\right\} - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_{x+1}} R_{u+1}$$

Die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres wird mit p multiplicirt, damit man ihren Werth für das Ende des zweiten Jahres erhalte. Davon geht dann ab:

1) als Rückgewähr für die $\frac{1}{2}(l_{x+1} + l_{x+2})(l_{u+1} - l_{u+2})$ im zweiten Jahre vor ihren Männern sterbenden Frauen: $\frac{1}{2}(l_{x+1} + l_{x+2})(l_{u+1} - l_{u+2})\, \underset{tx}{R}_{r(u)}$ und

2) für die am Ende des zweiten Jahres noch lebenden, aus diesem Jahre herrührenden $(l_{x+1} - l_{x+2})\, l_{u+2}$ Wittwen der Werth ihrer Renten im Betrage von $(l_{x+1} - l_{x+2})\, l_{u+2} . R_{(u+2)}$.

Vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden Versicherungen, so ergiebt sich

$$\underset{2}{R}_{es}\left[\underset{tx}{R}_{r(u)}\right] = \frac{\underset{tx}{R}}{l_{x+2} . l_{u+2}}\left[l_x . l_u . p^2 - \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})(l_u - l_{u+1})\, p\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}(l_{x+1} + l_{x+2})(l_{u+1} - l_{u+2})\right] - \frac{(l_x - l_{x+1})\, l_{u+1}}{l_{x+2} . l_{u+2}} . p . R_{(u+1)}$$

$$- \frac{(l_{x+1} . l_{x+2})\, l_{u+2}}{l_{x+2} . l_{u+2}} R_{(u+2)}$$

$$= \frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{l_{x+2} . \lambda_{u+2}}\left\{l_x . \lambda_u - \tfrac{1}{2}\left[(l_x + l_{x+1})\left(\frac{\lambda_u}{p} - \lambda_{u+1}\right) + (l_{x+1} + l_{x+2})\left(\frac{\lambda_{u+1}}{p} - \lambda_{u+2}\right)\right]\right\}$$

$$- \frac{1}{l_{x+2} . \lambda_{u+2}}\left[(l_x - l_{x+1})\, \lambda_{u+1} . R_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2})\, \lambda_{u+2}\, R_{u+2}\right]$$

Entwickelt man ebenso $\underset{3}{R}_{es}$, etc., so findet man

$$\underset{n}{R}_{es}\left[\underset{tx}{R}_{r(u)}\right] = \frac{\underset{tx}{R}_{r(u)}}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}\left[l_x . \lambda_u - \tfrac{1}{2}\left\{(l_x + l_{x+1})\left(\frac{\lambda_u}{p} - \lambda_{u+n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + (l_{x+1} + l_{x+2})\left(\frac{\lambda_{u+1}}{p} - \lambda_{u+2}\right) + \ldots . (l_{x+n-1} + l_{x+n})\left(\frac{\lambda_{u+n+1}}{p} - \lambda_{u+n}\right)\right\}\right]$$

$$- \frac{1}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}\left[(l_x - l_{x+1})\, \lambda_{u+1} . R_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2})\, \lambda_{u+2}\, R_{u+2}\right.$$

$$\left. + \ldots . . + (l_{x+n-1} - l_{x+n})\, \lambda_{u+n}\, R_{(u+n)}\right]$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, betrachten wir zunächst den im ersten Gliede befindlichen mit dem Factor $\frac{1}{2}$ behafteten Theil. Innerhalb der Klammer haben wir dort

$$(l_x + l_{x+1})\left(\frac{\lambda_u}{p} - \lambda_{u+1}\right) + (l_{x+1} + l_{x+2})\left(\frac{\lambda_{u+1}}{p} - \lambda_{u+2}\right) + \ldots (l_{x+n-1} + l_{x+n})\left(\frac{\lambda_{u+n-1}}{p} - \lambda_{x+n}\right)$$

Löst man die Klammern auf, so verwandelt sich dieser Theil in

$$l_x \cdot \frac{\lambda_u}{p} + \frac{l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}}{p} + \ldots \ldots \frac{l_{x+n-1} \cdot \lambda_{u+n-1}}{p}$$
$$- l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1} - l_{x+2} \cdot \lambda_{u+2} - \ldots \ldots - l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}$$
$$- l_x \cdot \lambda_{u+1} - l_{x+1} \cdot \lambda_{u+2} - \ldots \ldots - l_{x+n-1} \cdot \lambda_{u+n}$$
$$+ l_{x+1} \cdot \frac{\lambda_u}{p} + l_{x+2} \cdot \frac{\lambda_{u+1}}{p} + \ldots \ldots + l_{x+n} \cdot \frac{\lambda_{u+n-1}}{p}$$
$$= \frac{1}{p} \Sigma (l_x \cdot \lambda_u) - \frac{1}{p} \Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}) - \Sigma (l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}) + \Sigma (l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n+1})$$
$$- \Sigma (l_x \cdot \lambda_{u+1}) + \Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n+1}) + \frac{1}{p} \Sigma (l_{x+1} \cdot \lambda_u) - \frac{1}{p} \Sigma (l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n})$$

Fügen wir in der zweiten Reihe noch $l_x \cdot \lambda_u - l_x \cdot \lambda_u + l_{x+n}\, \lambda_{u+n} - l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}$ hinzu, so verwandelt sich diese zweite Reihe in

$$l_x \cdot \lambda_u - \Sigma (l_x \cdot \lambda_u) - l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} + \Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n})$$

und der ganze Ausdruck wird:

$$l_x \cdot \lambda_u - \frac{p-1}{p} \Sigma (l_x \cdot \lambda_u) - \Sigma (l_x \cdot \lambda_{u+1}) + \frac{1}{p} \Sigma (l_{x+1} \cdot \lambda_u)$$
$$- \left\{ l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} - \frac{p-1}{p} \Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}) - \Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n+1}) + \frac{1}{p} \Sigma (l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n}) \right\}$$
$$= l_x \cdot \lambda_u \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\Sigma (l_x \cdot \lambda_u)}{l_x \cdot \lambda_u} - \frac{\Sigma (l_x \cdot \lambda_{u+1})}{l_x \cdot \lambda_u} + \frac{1}{p} \cdot \frac{\Sigma (l_{x+1} \cdot \lambda_u)}{l_x \cdot \lambda_u} \right\}$$
$$- l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} \frac{\Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}} - \frac{\Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n+1})}{l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}} + \frac{1}{p} \cdot \frac{\Sigma (l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}} \right\}$$
$$= l_x \cdot \lambda_u \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot \frac{\Sigma (l_x \cdot \lambda_{u+1})}{l_x \cdot \lambda_{u+1}} + \frac{1}{p} \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{\Sigma (l_{x+1} \cdot \lambda_u)}{l_{x+1} \cdot \lambda_u} \right\}$$
$$- l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+n,u+n)} - \frac{\lambda_{u+n+1}}{\lambda_{u+n}} \cdot \frac{\Sigma (l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n+1})}{l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n+1}} + \frac{l_{x+n+1}}{p \cdot l_{x+n}} \cdot \frac{\Sigma (l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n})}{l_{x+n+1} \cdot \lambda_{u+n}} \right\}$$
$$= l_x \cdot \lambda_u \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)} - \frac{\lambda_{u+1}}{\lambda_u} \cdot R_{(x,u+1)} + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} R_{(x+1,u)} \right\}$$
$$- l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} \left\{ 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+n,u+n)} - \frac{\lambda_{u+n+1}}{\lambda_{u+n}} R_{(x+n,u+u+1)} + \frac{\lambda_{x+n+1}}{\lambda_{x+n}} \cdot R_{(x+n+1,u+n)} \right\}$$

Und dieser Ausdruck verwandelt sich mit Hülfe von Formel (99) in

$$l_x \cdot \lambda_u \cdot 2 \cdot C_{tu\,(x,u)} - l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n} \cdot 2 \cdot C_{t\,(u+n)\,(x+n,u+n)} \cdot$$

Das zweite Glied der rechten Seite in der Formel für $\underset{n}{R}_{es}\,[\underset{tx}{R}_{r(u)}]$ verwandelt sich zunächst in

$$- \frac{1}{l_{x+n} \cdot \lambda_{x+u}} \left[(l_x - l_{x+1}) \Sigma l_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) \Sigma \lambda_{u+2} + \ldots \ldots (l_{x+n-1} - l_{x+n}) \Sigma \lambda_{u+n} \right]$$

Betrachten wir zunächst den Theil des Gliedes innerhalb der Klammer, so ist

$$(l_x - l_{x+1}) \Sigma\lambda_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) \Sigma\lambda_{u+2}$$
$$= (l_x - l_{x+1}) (\lambda_{u+1} + \Sigma\lambda_{u+2}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) \Sigma\lambda_{u+2}$$
$$= (l_x - l_{x+1}) \lambda_{u+1} + (l_x - l_{x+2}) \Sigma\lambda_{u+2}$$

und ferner ist

$$(l_x - l_{x+1}) \Sigma\lambda_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) \Sigma\lambda_{u+2} + (l_{x+2} - l_{x+3}) \Sigma\lambda_{u+3}$$
$$= (l_x - l_{x+1}) (\lambda_{u+1} + \lambda_{u+2} + \Sigma\lambda_{u+3}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) (\lambda_{u+2}) \Sigma\lambda_{u+3} + (l_{x+2} - l_{x+3}) \Sigma\lambda_{u+3}$$
$$= (l_x - l_{x+1}) \lambda_{u+1} + (l_x - l_{x+2}) \lambda_{u+2} + (l_x - l_{x+3}) \Sigma\lambda_{u+3}$$

etc. und

$$(l_x - l_{x+1}) \Sigma\lambda_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) \Sigma\lambda_{u+2} + \ldots\ldots (l_{x+n-1} - l_{x+n}) \Sigma\lambda_{u+n}$$
$$= (l_x - l_{x+1}) \lambda_{u+1} + (l_x - l_{x+2}) \lambda_{u+2} + \ldots\ldots (l_x - l_{x+n-1}) \lambda_{u+n-1} + (l_x - l_{x+n}) \Sigma\lambda_{u+n}$$
$$= l_x (\lambda_{u+1} + \lambda_{u+2} + \ldots\ldots + \lambda_{u+n-1} + \Sigma\lambda_{u+n}) + l_{x+1} . \lambda_{u+1} - l_{x+2} . \lambda_{u+2} - \ldots\ldots$$
$$l_{x+n-1} . \lambda_{u+n-1} - l_{x+n} . \Sigma\lambda_{u+n}$$
$$= l_x . \Sigma\lambda_{u+1} - \Sigma(l_{x+1} . \lambda_{u+1}) + \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n}) - l_{x+n} . \Sigma\lambda_{u+n}$$

Fügt man noch $l_x . \lambda_u - l_x . \lambda_u$ hinzu, so ergiebt sich

$$l_x . \Sigma\lambda_u - \Sigma(l_x . \lambda_u) + \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n}) - l_{x+n} . \Sigma\lambda_{u+n}$$

und somit nimmt das zweite Glied von ${}_nR_{es}[{}_{tx}R_{r(u)}]$ die Gestalt an:

$$-\frac{1}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} \left\{ l_x . \lambda_u . \frac{\Sigma\lambda_u}{\lambda_u} - l_x . \lambda_u . \frac{\Sigma l_x . \lambda_u}{l_x . \lambda_u} + l_{x+n} . \lambda_{u+n} . \frac{\Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} - l_{x+n} . \lambda_{u+n} . \frac{\Sigma\lambda_{u+n}}{\lambda_{u+n}} \right\}$$
$$= -\frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} (R_u - R_{(x,u)}) - R_{(x+n,\, u+n)} + R_{(u+n)}$$

und somit ist

$${}_nR_{es}[{}_{tx}R_{r(u)}] = {}_{tx}R_{r(u)} . \frac{1}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} [l_x . \lambda_u - l_x . \lambda_u . C_{tu(x,u)} + l_{x+n} . \lambda_{u+n} . C_{tu+n\,(x+n,\, u+n)}]$$
$$- \frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} (R_u - R_{(x,u)}) - R_{(x+n,\, u+n)} + R_{(u+n)}$$
$$= \frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} [{}_{tx}R_{r(u)} (1 - C_{tu(x,u)}) - (R_u - R_{(x,u)})]$$
$$+ R_{(u+n)} - R_{(x+n,\, u+n)} + {}_{tx}R_{r(u)}\, C_{tu+n\,(x+n,\, u+n)}$$

Nun ist $${}_{tx}R_{r(u)} = \frac{R_u - R_{(x,u)}}{1 - C_{tu\,(x,u)}},\ \text{mithin}$$
$${}_{tx}R_{r(u)} (1 - C_{tu\,(x,u)}) = R_u - R_{(x,u)}$$

wegen welcher Gleichheit das erste Glied der rechten Seite verschwindet, und somit ergiebt sich schliefslich

$${}_nR_{es}[{}_{tx}R_{r(u)}] = R_{(u+n)} - R_{(x+n,\, u+n)} + {}_{tx}R_{r(u)} . C_{t(u+n)(x+n,\, u+n)} \qquad (109)$$
$$= {}_{tx+n}R_{(u+n)} + {}_{tx}R_{r(u)} . C_{t\,(u+n)\,(x+n,\, u+n)}$$

Anmerkung. Dasselbe Resultat erhält man so: Leben nach n Jahren sowohl der Versorger als auch die zu versorgende Person noch, so mufs die Reserve so grofs sein, dafs ein Theil derselben dem Werth der Ueberlebenspension gleich ist, also $= R_{(u+n)} - R_{(x+n,\, u+n)}$ und der andere Theil dem Werth einer Ueberlebensversicherung gleich ist, aber nicht mit der Versicherungssumme 1, sondern ${}_{tx}R_{r(u)}$, welche fällig wird, wenn die $(x+n)$jährige Person die andere überlebt. Der Werth dieser Versicherung ist $C_{t(u+n)(x+n,\, u+n)} . {}_{tx}R_{r(u)}$, und somit ist

$${}_nR_{es}[{}_{tx}R_{ru}] = R_{u+n} - R_{(x+n,\, u+n)} + C_{t\,u+n\,(x+n,\, u+n)} . {}_{tx}R_{r(u)}$$

§. 83. Bei der Ueberlebensversicherung mit Rückgewähr und einmaliger Prämienzahlung findet man auf ganz ähnliche Weise:

$$\underset{n}{R}_{es}[\underset{tx}{C}r_{(x,u)}] = C_{t\,x+n\,(x+n,\,u+n)} + C_{t\,u+n\,(x+n,\,u+n)} \cdot \underset{tx}{C}r_{(x,u)}$$

§. 84. Die erzielten Resultate in Bezug auf die Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung und Rückgewähr lassen sich folgendermafsen zusammenfassen. Die Prämie läfst sich immer in zwei Theile zerlegen, wovon der eine Theil die einmalige Prämie für die entsprechende Versicherung ohne Rückgewähr ist, während der zweite die einmalige Prämie ist für eine Kapitalversicherung, bei der in den Fällen, wo die Rückgewähr geleistet werden mufs, eben diese Rückgewähr als Versicherungssumme fällig wird. So war z. B.

$$\underset{y}{R}r_x = \frac{\underset{y}{R}_x}{1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}}$$

$$= \frac{\underset{y}{R}_x\left(1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}\right) + \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} \cdot \underset{y}{R}_x}{1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}}$$

$$= \underset{y}{R}_x + \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x} \cdot \frac{\underset{y}{R}_x}{1 - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+y+1}}{\lambda_x}}$$

$$= \underset{y}{R}_x + {}^yC_x \cdot \underset{y}{R}r_x$$

Ebenso ist

$$_yCr_x = {}_yC_x + {}^yC_x \,.\, {}_yCr_x$$
$$^yClr_x = {}^yCl_x + {}^yC_x \,.\, {}^yClr_x$$
$$^yCr_x = {}^yC_x + {}^yCl_x \,.\, {}^yCr_x \text{ etc.}$$

und man findet die Reserve, indem man die einzelnen Theile der Prämie für die Versicherung mit Rückgewähr als einmalige Prämie für zwei verschiedene Versicherungen ohne Rückgewähr betrachtet und darauf dann den im §. 75. aufgestellten Satz anwendet. So haben wir z. B. gefunden:

für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}[\underset{y}{R}r_x] = \underset{n}{R}_{es}[\underset{y}{R}_x + {}^yC_x \cdot \underset{y}{R}r_x]$$
$$= \underset{y-n}{R}_{x+n} + {}^{y-n}C_{x+n} \cdot \underset{y}{R}r_x \text{ etc.}$$

Wir haben die obigen zum Theil einen gröfseren Rechnungsaufwand erfordernden Entwickelungen vorangeschickt, um auch hier zu zeigen, dafs die Reserve bleibt, nachdem die Versicherungsbank den erwartungsmäfsig fällig werdenden Leistungen genügt hat.

B. Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung.

§. 85. Schliefsen wir zuerst die Versicherungen mit veränderlicher Prämienzahlung und zweitens die Versicherungen mit Rückgewähr aus, so haben wir folgenden allgemeinen Satz:

Die Reserve für eine Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung nach n Jahren ist gleich der Differenz aus der einmaligen Prämie für dieselbe Versicherung, aber bei einem um n Jahre höheren Alter des oder der Versicherten und aus der ursprünglichen jährlichen Prämie, multiplicirt mit dem Werth der Rente, resp. Verbindungsrente für um n Jahre höhere Alter, welche bis zu dem das Aufhören der jährlichen Prämienzahlung bedingenden Ereigniſs läuft.

Wir wollen diesen Satz wieder an einigen Beispielen beweisen:

1. Für die aufgeschobene Rente ist die jährliche Prämie

$$P[{}_{y}R_x] = \frac{{}_{y}R_x}{R_x^y} = \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}$$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die Einzahlung des ersten Jahres

$$l_x \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}},$$

welche Summe in einem Jahre durch die daraus entspringenden Zinsen anwächst zu

$$l_x \cdot p \, \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}$$

Vertheilt man diese Summe auf die am Ende des Jahres noch bestehenden l_{x+1} Versicherungen, so hat man:

$$\begin{aligned}
{}_{1}R_{e.s}[P({}_{y}R_x)] &= \frac{l_x \cdot p}{l_{x+1}} \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} \\
&= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} \\
&= \frac{\frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}}}{\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}} \\
&= \frac{\frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}}\left(1 - \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x} + \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}\right)}{\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}} \\
&= \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} - \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} \cdot \frac{\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x} - 1}{\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_x}} \\
&= \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}} - \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} \cdot \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - \lambda_x}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} \\
&= \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} - \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+1} - \Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+1}} \\
&= {}_{y-1}R_{x+1} - P[{}_{y}R_x] \cdot R_{x+1}^{y-1}
\end{aligned}$$

Die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres $l_x \cdot p \cdot \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}$ vermehrt sich am

Anfang des zweiten Jahres um die neue Prämienzahlung der noch lebenden l_{x+1} Versicherten. Multiplicirt man dann wieder mit p, so hat man die Gesammtreserve am Ende des zweiten Jahres und diese kann man auf die Form bringen:

$$(l_x \cdot p^2 + l_{x+1} \cdot p) \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

Vertheilt man diese Summe auf die einzelnen noch bestehenden Versicherungen, so ist

$$\underset{2}{R}_{es}[P(\underset{y}{R}_x)] = \frac{l_x \cdot p^2 + l_{x+1} \cdot p}{l_{x+2}} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

$$= \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

Schliefst man ebenso weiter, so findet man

$$\underset{n}{R}_{es}[P(\underset{y}{R}_x)] = \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1} + \ldots\ldots + \lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

$$= \frac{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+n}}{\lambda_{x+n}} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}} \tag{110}$$

wo natürlich $n < y$ vorausgesetzt ist.

Fügt man hier im Zähler des ersten Factors $-\Sigma \lambda_{x+y} + \Sigma \lambda_{x+y}$ hinzu, so ergiebt sich:

$$\underset{n}{R}_{es}[P(\underset{y}{R} r_x)] = \left(\frac{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} - \frac{\Sigma \lambda_{x+n} - \Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}}\right) \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}}$$

$$= \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} - \frac{\Sigma \lambda_{x+n} - \Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+n}} \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+y}} \cdot$$

$$= \underset{y-n}{R}_{x+n} - R^{y-n}_{x+n} \cdot P(\underset{y}{R}_x) \text{ q. e. d.}$$

Für $n = y$ wird aus Formel (110)

$$\underset{y}{R}_{es}[P(\underset{y}{R}_x)] = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}} = R_{x+y}$$

was sich ergeben mufs, da nach y Jahren die Rente zu laufen beginnt.

2. Die jährliche Prämie bei der gewöhnlichen Lebensversicherung ist

$$P_x = \frac{C_x}{R_x} = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\Sigma \lambda_x}$$

Bei l_x solcher Versicherungen beträgt die erste Einzahlung $l_x \cdot P_x$, welche in einem Jahre anwächst zu $l_x \cdot P_x \cdot p$. Im Laufe des ersten Jahres sterben t_{x+1} Personen, bei jedem Todesfalle wird die Summe 1 gezahlt, mithin verbleibt am Ende des ersten Jahres $l_x \cdot P_x \cdot p - t_{x+1}$; vertheilt man diese Summe auf die l_{x+1} noch bestehenden Versicherungen, so ist

$$\underset{1}{R}_{es}(P_x) = \frac{l_x \cdot P_x \cdot p - t_{x+1}}{l_{x+1}}$$

$$= \frac{\lambda_x \cdot P_x - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}}$$

Am Anfang des zweiten Jahres kommt zu der Gesammtreserve hinzu $l_{x+2} \cdot P_x$ als neue Prämienzahlung. Multiplicirt man, nachdem diese Summe addirt ist, mit p, so hat man den Werth der Gesammtreserve am Ende des zweiten Jahres, wovon aber noch

die Summe t_{x+2} wegen der im zweiten Jahre vorkommenden Sterbefälle abgeht. Dividirt man dann durch l_{x+2}, weil am Ende des zweiten Jahres l_{x+2} Versicherungen noch bestehen, so ist

$$\underset{2}{R}_{es}(P_x) = \frac{l_x \cdot P_x \cdot p^2 - t_{x+1} \cdot p + l_{x+1} \cdot P_x \cdot p - t_{x+2}}{l_{x+2}}$$

$$= \frac{P_x \cdot (\lambda_x + \lambda_{x+1}) - (\tau_{x+1} + \tau_{x+2})}{\lambda_{x+2}}$$

Schliefst man ebenso weiter, so ergiebt sich

$$\underset{y}{R}_{es}(P_x) = \frac{P_x (\lambda_x + \lambda_{x+1} + \ldots\ldots \lambda_{x+n-1}) - (\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots\ldots \tau_{x+n})}{\lambda_{x+n}}$$

$$= \frac{P_x (\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+n}) - [\Sigma \tau_{x+1} - \Sigma \tau_{x+n+1}]}{\lambda_{x+n}}$$

$$= \frac{P_x (\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+n}) - \Sigma \tau_{x+1}}{\lambda_{x+n}} + \frac{\Sigma \tau_{x+n+1}}{\lambda_{x+n}}$$

Nun war $P_x = \frac{\Sigma \tau_{x+1}}{\Sigma \lambda_x}$, mithin

$$\Sigma \tau_{x+1} = P_x \cdot \Sigma \lambda_x$$

und

$$\underset{n}{R}_{es}(P_x) = \frac{P_x (\Sigma \lambda_x - \Sigma \lambda_{x+n} - \Sigma \lambda_x)}{\lambda_{x+n}} + \frac{\Sigma \tau_{x+n+1}}{\lambda_{x+n}}$$

$$= \frac{\Sigma \tau_{x+n+1}}{\lambda_{x+n}} - P_x \cdot \frac{\Sigma \lambda_{x+n}}{\lambda_{x+n}}$$

$$= C_{x+n} - P_x \cdot R_{x+n} \text{ q. e. d.}$$

3. Die jährliche Prämie für die Versicherung der Summe 1, zahlbar beim Tode des Zuerststerbenden von zwei Versicherten ist

$$P_{t,(x,u)} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}}$$

Bei $l_x \cdot l_u$ solcher Versicherungen beträgt die erste Einzahlung $l_x \cdot l_u \cdot P_{t,(x,u)}$, welche in einem Jahre anwächst zu $l_x \cdot l_u \cdot P_{t,(x,u)} \cdot p$. Im ersten Jahre erlöschen, sei es durch den Tod der einen oder der beiden Versicherten $(l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1})$ Paare und dies ist zugleich die fällig werdende Versicherungssumme; und somit bleibt als Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres

$$l_x \cdot l_u \cdot P_{t,(x,u)} \cdot p - (l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u-1})$$

Wird diese Summe durch $l_{x+1} \cdot l_{u+1}$, die Anzahl der am Ende des ersten Jahres noch bestehenden Versicherungen, dividirt, so hat man die Reserve für die einzelne Versicherung, und somit ist

$$\underset{1}{R}_{es}[P_{t,(x,u)}] = \frac{l_x \cdot l_u}{l_{x+1} \cdot l_{u+1}} \cdot p\, P_{t,(x,u)} - \frac{l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1}}{l_{x+1} \cdot l_{u+1}}$$

$$= \frac{l_x \cdot \lambda_u}{l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}} \cdot P_{t,(x,u)} - \frac{l_x \cdot \frac{\lambda_u}{p} - l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}}{l_{x+1} \cdot \lambda_{u+1}}$$

Die Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres wird durch die neue Prämienzahlung am Anfang des zweiten Jahres vermehrt um $l_{x+1} \, . \, l_{u+1} \, . \, P_{t,(x,u)}$. Multiplicirt man dann abermal durch p und zieht ab $l_{x+1} \, . \, l_{u+1} - l_{x+2} \, . \, l_{u+2}$ wegen der im zweiten Jahre sich auflösenden Paare, so bleibt als Gesammtreserve:

$$\begin{aligned} & l_x \, . \, l_u \, . \, p^2 \, . \, P_{t,(x,u)} - (l_x \, . \, l_u - l_{x+1} \, . \, l_{u+1}) \, . \, p \\ & + l_{x+1} \, . \, l_{u+1} \, . \, p \, . \, P_{t,(x,u)} - (l_{x+1} \, . \, l_{u+1} - l_{x+2} \, . \, l_{u+2}) \\ & = (l_x \, . \, l_u \, p^2 + l_{x+1} \, . \, l_{u+1} \, p) \, P_{t,(x,u)} - (l_x \, . \, l_u - l_{x+1} \, . \, l_{u+1}) \, p \\ & \quad - (l_{x+1} \, . \, l_{u+1} - l_{x+2} \, . \, l_{u+2}) \end{aligned}$$

und für jede einzelne der noch bestehenden $l_{x+2} \, . \, l_{u+2}$ Versicherungen hat man

$$\begin{aligned} \underset{2}{R}_{es}[P_{t,(x,u)}] &= \frac{l_x \, . \, l_u \, . \, p^2 + l_{x+1} \, . \, l_{u+1} \, . \, p}{l_{x+2} \, . \, l_{u+2}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{(l_x \, . \, l_u - l_{x+1} \, . \, l_{u+1}) \, p + (l_{x+1} \, . \, l_{u+1} - l_{x+2} \, . \, l_{u+2})}{l_{x+2} \, . \, l_{u+2}} \\ &= \frac{l_x \, . \, \lambda_u + l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1}}{l_{x+2} \, . \, \lambda_{u+2}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{\left(l_x \, . \, \frac{\lambda_u}{p} - l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1}\right) + \left(l_{x+1} \, . \, \frac{\lambda_{u+1}}{p} - l_{x+2} \, . \, \lambda_{u+2}\right)}{l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1}} \end{aligned}$$

Schliefst man auf dieselbe Weise weiter, so findet man

$$\begin{aligned} \underset{n}{R}_{es}[P_{t,(x,u)}] &= \frac{l_x \, . \, \lambda_u + l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1} + \ldots\ldots l_{x+n-1} \, . \, \lambda_{u+n-1}}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{\left(l_x \, . \, \frac{\lambda_u}{p} - l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1}\right) + \left(l_{x+1} \, . \, \frac{\lambda_{u+1}}{p} - l_{x+2} \, . \, \lambda_{u+2}\right) + \ldots + \left(\frac{l_{x+n-1} \, . \, \lambda_{u+n-1}}{p} - l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}\right)}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \\ &= \frac{\Sigma(l_x \, . \, \lambda_u) - \Sigma(l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{l_x \, . \, \frac{\lambda_u}{p} - \frac{p-1}{p}(l_{x+1} \, . \, \lambda_{u+1} + l_{x+2} \, . \, \lambda_{u+2} + \ldots\ldots l_{x+n-1} \, . \, \lambda_{u+n-1}) - l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \end{aligned}$$

Fügt man im Zähler des letzten Gliedes noch $l_x \, . \, \lambda_u - l_x \, . \, \lambda_u$ hinzu, so wird

$$\begin{aligned} \underset{n}{R}_{es}[P_{t,(x,u)}] &= \frac{\Sigma(l_x \, . \, \lambda_u) - \Sigma(l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{l_x \, . \, \lambda_u - \frac{p-1}{p}[\Sigma(l_x \, . \, \lambda_u) - \Sigma(l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n})] - l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \\ &= \frac{\Sigma(l_x \, . \, \lambda_u)}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \, . \, P_{t,(x,u)} - \frac{\Sigma(l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \, . \, P_{t,(x,u)} \\ & - \frac{l_x \, . \, \lambda_u - \frac{p-1}{p}\Sigma(l_x \, . \, \lambda_u)}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} + \frac{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n} - \frac{p-1}{p}\Sigma(l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n})}{l_{x+n} \, . \, \lambda_{u+n}} \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite verwandelt sich, weil

$$P_{t,(x,u)} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}} = \frac{l_x . \lambda_u - \frac{p-1}{p} \Sigma(l_x . \lambda_u)}{\Sigma(l_x . \lambda_u)}$$

in

$$\frac{l_x . \lambda_u - \frac{p-1}{p} \Sigma(l_x . \lambda_u)}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}$$

und hebt sich deshalb mit dem dritten Gliede auf und es bleibt

$$\underset{n}{R_{es}} [P_{t,(x,u)}] = \frac{l_{x+n} . \lambda_{u+n} - \frac{p-1}{p} \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} - R_{(x+n,u+n)} . P_{t,(x,u)}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} . \frac{\Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} - R_{(x+n,u+n)} . P_{t,(x,u)}$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p} R_{(x+n,u+n)} - R_{(x+n,u+n)} . P_{t,(x,u)}$$

$$= C_{t,(x+n,u+n)} - R_{(x+n,u+n)} . P_{t,(x,u)} \quad \text{q. e. d.}$$

4. Schliefslich wollen wir die Richtigkeit unseres Satzes noch an der Versicherung einer Ueberlebensrente mit jährlicher Prämie beweisen. Hierfür war

$$P[R_{t\,x(u)}] = \frac{R_u - R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}}$$

Bei $l_x . l_u$ solcher Versicherungen beträgt die erste Einzahlung $l_x . l_u . P[R_{t\,x(u)}]$, welche in einem Jahre anwächst zu $l_x . l_u . P[R_{t\,x(u)}] . p$. Bezeichnen wir einstweilen zur Abkürzung die jährliche Prämie nur mit P, so kann man für den Werth der Einzahlung am Ende des ersten Jahres schreiben $l_x . l_u . P . p$. Von den im Laufe des ersten Jahres Wittwen werdenden $t_{x+1} . l_u$ Frauen leben am Ende des Jahres noch $t_{x+1} . l_{u+1} = (l_x - l_{x+1}) l_{u+1}$, jede derselben erhält eine Leibrente. Von dem Werthe der Gesammteinzahlung am Ende des ersten Jahres geht also ab $(l_x - l_{x+1}) l_{u+1} . R_{(u+1)}$. Vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden Versicherungen, so ist

$$\underset{1}{R_{es}}(P) = \frac{l_x . l_u . P . p - (l_x - l_{x+1}) l_{u+1} R_{u+1}}{l_{x+1} . l_{u+1}}$$

$$= \frac{l_x . \lambda_u . P - (l_x - l_{x+1}) \lambda_{u+1} R_{(u+1)}}{l_{x+1} . \lambda_{u+1}}$$

Am Anfang des zweiten Jahres kommt zu der Gesammtreserve die neue Prämienzahlung im Betrage von $l_{x+1} . l_{u+1} . P$. Man multiplicirt die so vermehrte Reserve mit p und nimmt dann davon weg $(l_{x+1} - l_{x+2}) l_{u+2} . R_{(u+2)}$. Denn $(l_{x+1} - l_{x+2}) l_{u+2}$ ist die Anzahl der am Ende des zweiten Jahres noch lebenden aus diesem zweiten Jahre herrührenden Wittwen. Vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden Versicherungen, so ist

$$\underset{2}{R_{es}}(P) = \frac{(l_x . l_u . p^2 + l_{x+1} . l_{u+1} p)}{l_{x+2} . l_{u+2}} P - \frac{(l_x - l_{x+1}) l_{u+1} R_{u+1} . p + (l_{x+1} - l_{x+2}) l_{u+2} R_{u+2}}{l_{x+2} . l_{u+2}}$$

$$= \frac{l_x . \lambda_u + l_{x+1} . \lambda_{u+1}}{l_{x+2} . \lambda_{u+2}} P - \frac{(l_x - l_{x+1}) \lambda_{u+1} R_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) \lambda_{u+2} R_{u+2}}{l_{x+2} . \lambda_{u+2}}$$

Schließt man ebenso weiter, so ergiebt sich

$$\underset{n}{R}_{es}(P) = \frac{l_x . \lambda_u + l_{x+1} . \lambda_{u+1} + \ldots\ldots l_{x+n-1} . \lambda_{u+n-1}}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} P$$

$$- \frac{(l_x - l_{x+1})\lambda_{u+1} . R_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2})\lambda_{u+2} R_{u+2} + \ldots (l_{x+n-1} - l_{x+n})\lambda_{u+n} . R_{u+n}}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}$$

$$= \frac{\Sigma(l_x . \lambda_u) - \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} P$$

$$- \frac{(l_x - l_{x+1})\Sigma\lambda_{u+1} + (l_{x+1} - l_{x+2})\Sigma\lambda_{u+2} + \ldots\ldots (l_{x+n-1} - l_{x+n})\Sigma\lambda_{u+n}}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}$$

Der Zähler des zweiten Gliedes der rechten Seite ist nach §. 82:

$$= l_x . \Sigma\lambda_u - \Sigma(l_x . \lambda_u) + \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n}) - l_{x+n} . \Sigma\lambda_{u+n};$$ mithin wird

$$\underset{n}{R}_{es}(P) = \frac{\Sigma(l_x . \lambda_u) - \Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} P$$

$$- \frac{l_x . \Sigma\lambda_u - \Sigma(l_x . \lambda_u) + \Sigma(l_{x+n, u+n}) - l_{x+n}\Sigma\lambda_{u+n})}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}}$$

$$= \frac{\Sigma l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} . P - R_{(x+n, u+n)} . P - \frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} [R_u - R_{(x, u)}]$$

$$- R_{(x+n, u+n)} + R_{(u+n)}$$

$$= \frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} . R_{(x, u)} . P - R_{(x+n, u+n)} . P$$

$$- \frac{l_x . \lambda_u}{l_{x+n} . \lambda_{u+n}} [R_u - R_{(x, u)}] + R_{(u+n)} - R_{(x+n, u+n)}$$

Da $$P = \frac{R_u - R_{(x,u)}}{R_{(x, u)}},$$ also

$$R_{(x, u)} . P = R_{(u)} - R_{(x, u)}$$

so hebt sich das erste und dritte Glied auf und es ist

$$\underset{n}{R}_{es}[P(R_{tx(u)})] = R_{u+n} - R_{(x+n, u+n)} - R_{(x+n, u+n)} . P(R_{tx(u)})$$

$$= R_{tx+n(u+n)} - R_{(x+n, u+n)} . P(R_{tx(u)})$$ q. e. d.

§. 86. Der aufgestellte Satz über die Reserve mit jährlicher Prämienzahlung läſst sich auch so herleiten: Besteht eine Versicherung *n* Jahr, so müſste die Versicherungsbank, falls sie keine Prämien mehr erhielten, nach §. 75 die einmalige Prämie für diese Versicherung bei einem um *n* Jahre höheren Alter des oder der Versicherten als Reserve haben. Nun erhält aber die Versicherungsbank noch Prämien, und der Werth derselben ist gleich dem Werth einer Rente für dasjenige Alter der Versicherten, welches sie *n* Jahre nach Abschluſs der Versicherung haben, welche Rente aufhört mit dem Ereigniſs, welches das Aufhören der Prämienzahlung bedingt. Der jährliche Betrag dieser Rente ist aber nicht 1, sondern eben die jährliche Prämie. Der Werth der noch zu erwartenden Prämienzahlung ist also das Product aus der jährlichen Prämie und dem Rentenwerthe für das um *n* Jahre höhere Alter. Zieht man dies Product von der einmaligen Prämie für das um *n* Jahre höhere Alter ab, so hat man die Reserve.

§. 87. Bezeichnet E allgemein die einmalige Prämie für eine Versicherung und E_n die einmalige Prämie für dieselbe Versicherung bei einem um n Jahre höheren Alter, und entsprechend J und J_n die jährlichen Prämien und M und M_n die Renten, welche mit demselben Ereignifs aufhören, wie die Prämienzahlung, so ist

$$\underset{n}{R_{es}}(J) = E_n - J \cdot M_n \tag{111}$$

Nun ist aber

$$\frac{E_n}{M_n} = J_n$$

oder

$$E_n = J_n \cdot M_n$$

Mithin

$$\underset{n}{R_{es}}(J) = J_n \cdot M_n - J \cdot M_n \text{ oder}$$

$$R_{es}(J) = (J_n - J)\, M_n \tag{112}$$

d. h. die Reserve findet man, indem man die Differenz aus der jährlichen Prämie für das um n Jahre höhere Alter und der ursprünglichen jährlichen Prämie mit der entsprechenden Rente für das um n Jahre höhere Alter multiplicirt. So ist z. B. nach unserer früheren Bezeichnung

$$\underset{n}{R_{es}}(P_x) = [P_{x+n} - P_x]\, R_{x+n}$$

§. 88. Bei denjenigen Versicherungen, wo sich die einmalige Prämie auf die Form bringen läfst (bei der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung)

$$E = 1 - \frac{p-1}{p} M,$$

und entsprechend

$$J = \frac{1 - \frac{p-1}{p} M}{M} = \frac{1}{M} - \frac{p-1}{p}$$

kann man der Reserve noch eine andere bemerkenswerthe Gestalt geben. Es ist dann

$$\begin{aligned} \underset{n}{R_{es}}(J) &= [J_n - J]\, M_n \\ &= \left\{ \frac{1}{M_n} - \frac{p-1}{p} - \frac{1}{M} + \frac{p-1}{p} \right\} M_n \\ &= 1 - \frac{M_n}{M} \end{aligned} \tag{113}$$

d. h. man dividirt die Rente für das um n Jahre höhere Alter durch die Rente für das ursprüngliche Alter und subtrahirt diesen Quotienten von 1. Die Versicherungen, bei denen dies der Fall ist, sind

1. die einfache Lebensversicherung; hier ist

$$P_x = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_x}{R_x} = \frac{1}{R_x} - \frac{p-1}{p}$$

und

$$\underset{n}{R_{es}}(P_x) = 1 - \frac{R_{x+n}}{R_x}.$$

2. Die Versicherung der Summe 1, zahlbar nach dem Tode des Versicherten, oder sobald derselbe ein bestimmtes Alter erreicht. Hier ist

$$ {}^y\mathfrak{P}_x = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_x^y}{R_x^y} = \frac{1}{R_x^y} - \frac{p-1}{p} $$

und
$$ {}_n R_{es} \left[{}^y\mathfrak{P}_x \right] = 1 - \frac{R_{x+n}^{y-n}}{R_x^y} $$

3. Die Versicherung der Summe 1, zahlbar beim Tode des von zwei Versicherten Zuerststerbenden. Hier ist

$$ P_{t,(x,u)} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} R_{(x,u)}}{R_{(x,u)}} = \frac{1}{R_{(x,u)}} - \frac{p-1}{p} $$

und
$$ {}_n R_{es} \left[P_{t,(x,u)} \right] = 1 - \frac{R_{(x+n,\, u+n)}}{R_{(x,u)}} $$

4. Die Versicherung der Summe 1, zahlbar beim Tode des von zwei Versicherten Zuletztsterbenden. Hier ist

$$ P_{t_{\prime\prime}(x,u)} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} \left[R_x + R_u - R_{(x,u)} \right]}{R_x + R_u - R_{(x,u)}} $$
$$ = \frac{1}{R_x + R_u - R_{(x,u)}} - \frac{p-1}{p} $$

und
$$ {}_n R_{es} \left[P_{t_{\prime\prime}(x,u)} \right] = 1 - \frac{R_{x+n} + R_{u+n} - R_{(x+n,\, u+n)}}{R_x + R_u - R_{(x,u)}} $$

Anmerkung. Diese vier Arten von Versicherungen haben wir oben behandelt. Man könnte aber noch andere aufstellen, bei denen dieser Satz ebenfalls Anwendung findet; und zwar findet sich für die jährliche Prämie die Form

$$ J = \frac{1}{M} - \frac{p-1}{p} \;. $$

und für die einmalige Prämie
$$ E = 1 - \frac{p-1}{p} . M $$

überall da, wo die Zahlung der Versicherungssumme als ganz bestimmt eintretend vorausgesetzt wird und wo die jährliche Prämienzahlung bis zu dem Eintritt der Auszahlung der Versicherungssumme geleistet wird. Es müssen also auch für die in der Anmerkung zu §. 27 behandelte sogenannte Sparkassenversicherung die Prämien auf die angegebene Form gebracht werden können. Wir haben in der angezogenen Anmerkung gefunden

$$ {}^y\mathfrak{K} = \frac{1}{p^y} \tag{60} $$

und
$$ {}^y\mathfrak{P} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{p^y - 1} \; ; \tag{61} $$

die Rente, die hier der Prämienzahlung entspricht, ist eine sogenannte Zeitrente, die ohne Rücksicht auf Leben und Sterben des Versicherten y Jahre hindurch gezahlt wird. Bezeichnen wir eine solche Rente durch Z_y, so ist, wie leicht erhellt:

$$ Z_y = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\ldots \frac{1}{p^{y-1}} $$
$$ = \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^y}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p^y - 1}{p^{y-1}(p-1)} $$

oder
$$ p^{y-1}(p-1) . Z_y = p^y - 1 $$

Dividirt man auf beiden Seiten mit p^y, so ist

$$\frac{p-1}{p} \cdot Z_y = 1 - \frac{1}{p^y}$$

oder

$$\frac{1}{p^y} = 1 - \frac{p-1}{p} Z_y$$

Es war aber

$$\frac{1}{p^y} = {}^y\mathfrak{R},$$

also

$${}^y\mathfrak{R} = 1 - \frac{p-1}{p} Z_y \tag{60 a}$$

und da man die jährliche Prämie aus der einmaligen Prämie findet, indem man mit der der Prämienzahlung entsprechenden Rente dividirt, so ist

$${}^y\mathfrak{P} = \frac{{}^y\mathfrak{R}}{Z_y} = \frac{1 - \frac{p-1}{p} Z_y}{Z_y}$$

oder

$${}^y\mathfrak{P} = \frac{1}{Z_y} - \frac{p-1}{p} \tag{61 a}$$

Der oben bewiesene Satz von der Reserve gilt nun auch hier und es ist für $n \gtreqless y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^y\mathfrak{P}) = 1 - \frac{Z_{y-n}}{Z_y}.$$

§. 89. Wir haben oben §. 85 No. 2 die Formel gefunden

$$\underset{n}{R}_{es}[P_x] = \frac{(\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}) P_x - (\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1})}{\lambda_{x+n}}$$

Dieser Ausdruck läfst sich auf folgende Form bringen:

$$\underset{n}{R}_{es}[P_x] = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} \left\{ \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\lambda_x} P_x - \frac{\Sigma\tau_{x+1} - \Sigma\tau_{x+n+1}}{\lambda_x} \right\}$$

oder

$$\underset{n}{R}_{es}[P_x] = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} [R_x^n \cdot P_x - {}^nC_x] \tag{114}$$

Diese Formel ist ebenfalls eine allgemeine, geltend für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall, nur mufs man bei Versicherungen auf verbundene Leben $\frac{l_x \cdot \lambda_u}{l_{x+n} \cdot \lambda_{u+n}}$ statt $\frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}$ setzen und statt R_x^n die entsprechende aufhörende Verbindungsrente, statt P_x die entsprechende Prämie, und statt ${}^nC_x$ die einmalige Prämie für die entsprechende kurze Versicherung auf n Jahre. Die Formel gilt auch noch für Versicherungen von aufgeschobenen Renten und Kapitalversicherungen auf den Lebensfall, nur dafs dann das zweite Glied innerhalb der Klammer wegfällt, weil die Bank innerhalb der Aufschubszeit keine Leistung hat. Es ist also für $n < y$

$$R_{es}[{}^yPl_x] = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} \cdot R_x^n \cdot {}^yPl_x \tag{115}$$

und

$$R_{es}[P(\underset{y}{R}_x)] = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} \cdot R_x^n \cdot P(\underset{y}{R}_x) \tag{116}$$

§. 90. Reserven für Versicherungen mit veränderlichen Prämien. Wir haben oben nur für die einfache Lebensversicherung auf Lebenszeit veränderliche Prämien berechnet, und wollen uns jetzt darauf beschränken, auch nur für diesen Fall die Reserve zu berechnen. Es wird leicht erhellen, wie man in jedem andern Falle verfahren

mufs. Wir wollen die Prämie des ersten Versicherungsjahres bezeichnen mit P_1, des zweiten Jahres mit P_2 etc. Alsdann beträgt bei l_x Versicherungen die erste Einzahlung $l_x . P_1$, welche nach einem Jahre den Werth hat $l_x . P_1 . p$. Im ersten Jahre wird die Versicherungssumme t_{x+1} fällig; zieht man diese Summe von der obigen ab und vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden Versicherungen, so ist, wenn man die Reserve schlechtweg mit $R_{es(x)}$ bezeichnet,

$$\underset{1}{R}_{es(x)} = \frac{l_x . P_1 . p - t_{x+1}}{l_{x+1}}$$
$$= \frac{\lambda_x . P_1 - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}}$$
$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} \left(P_1 - \frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x}\right)$$

Nun ist aber $\frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x} = {}^1C_x$, mithin

$$\underset{1}{R}_{es(x)} = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} (P_1 - {}^1C_x)$$

Am Ende des ersten Jahres beträgt die Gesammtreserve $l_{x+1} . \underset{1}{R}_{es(x)}$; hierzu kommt die neue Prämienzahlung im Werthe von $l_{x+1} . P_2$. Diese Summe wird mit p multiplicirt und dann um t_{x+2}, der im zweiten Jahr fällig werdenden Versicherungssumme, vermindert, also

$$[l_{x+1} . \underset{1}{R}_{es(x)} + l_{x+1} . P_2]\, p - t_{x+2}$$
$$= l_{x+1} . p . [\underset{1}{R}_{es(x)} + P_2] - t_{x+2}$$

Dividirt man mit l_{x+2}, so hat man

$$\underset{2}{R}_{es(x)} = \frac{l_{x+1} . p\ [\underset{1}{R}_{es(x)} + P_2] - t_{x+2}}{l_{x+2}}$$
$$= \frac{\lambda_{x+1}\ [\underset{1}{R}_{es(x)} + P_2] - \tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}}$$
$$= \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}} \left[\underset{1}{R}_{es(x)} + P_2 - \frac{\tau_{x+2}}{\lambda_{x+1}}\right]$$
$$= \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}}\ [\underset{1}{R}_{es(x)} + P_2 - {}^1C_{x+1}]$$

Ebenso findet man

$$\underset{3}{R}_{es(x)} = \frac{\lambda_{x+2}}{\lambda_{x+3}}\ [\underset{2}{R}_{es(x)} + P_3 - {}^1C_{x+2}] \text{ etc.}$$
$$\underset{n}{R}_{es(x)} = \frac{\lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}}\ [\underset{n-1}{R}_{es(x)} + P_n - {}^1C_{x+n-1}] \qquad (117)$$

Anmerkung. Die vorstehende Formel gilt auch, wenn die jährliche Prämie unveränderlich ist. Es ist dann $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots\ldots = P_n$.

§. 91. Reserve der Versicherungen mit jährlicher Prämie und Rückgewähr. Zuerst betrachten wir die Versicherungen einer aufgeschobenen Leibrente und einer Kapitalversicherung auf den Lebensfall.

Für die aufgeschobene Leibrente ist die jährliche Prämie mit Rückgewähr

$$Pr(\underset{y}{R}_x) = \frac{\Sigma \lambda_{x+y}}{y \cdot \lambda_{x+y} + \frac{p-1}{p} L_x^y}$$

Bezeichnen wir einstweilen diese Prämie schlechtweg mit Pr, so ist bei l_x solcher Versicherungen die erste Einzahlung nach einem Jahre werth $l_x \cdot p \cdot Pr$, davon geht ab $t_{x+1} \cdot Pr$, wegen der im ersten Jahre vorkommenden Sterbefälle. Vertheilt man den Rest auf die noch bestehenden Versicherungen, so hat man für die einzelne Versicherung

$$\underset{1}{R}_{es}(Pr) = \frac{l_x \cdot p - t_{x+1}}{l_{x+1}} \cdot Pr$$

$$= \frac{\lambda_x - \tau_{x+1}}{\lambda_{x+1}} \cdot Pr$$

Im zweiten Jahre kommt zu der Gesammtreserve am Ende des ersten Jahres hinzu $l_{x+1} \cdot Pr$ als neue Prämienzahlung. Von dem Werth, den die so vermehrte Gesammtreserve nach einem Jahre, d. h. am Ende des zweiten Versicherungsjahrs erlangt, geht wegen der Sterbefälle des zweiten Jahres, für deren jeden $2 \cdot Pr$ zurückgewährt wird, $2 t_{x+2} \cdot Pr$ ab, und somit ist, wenn man den Rest vertheilt,

$$\underset{2}{R}_{es}(Pr) = \frac{[l_x \cdot p - t_{x+1} + l_{x+1}]\, p - 2 t_{x+2}}{l_{x+2}} \cdot Pr$$

$$= \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1} - (\tau_{x+1} + 2\tau_{x+2})}{\lambda_{x+2}} \cdot Pr$$

Schliefst man so weiter, so ist für $n < y$:

$$\underset{n}{R}_{es}(Pr) = \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1} + \ldots\ldots \lambda_{x+n-1} - (\tau_{x+1} + 2\tau_{x+2} + \ldots\ldots n\tau_{x+n})}{\lambda_{x+n}} \cdot Pr$$

$$= \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n} - T_{x+1}^n}{\lambda_{x+n}} \cdot Pr \qquad (118)$$

Man kann aber auch folgende Umformung vornehmen:

$$\underset{1}{R}_{es}(Pr) = \frac{l_x \cdot p - t_{x+1}}{l_{x+1}} \cdot Pr$$

$$= \frac{l_x \cdot p - l_x + l_{x+1}}{l_{x+1}} \cdot Pr$$

$$= \left\{1 + \frac{l_x}{l_{x+1}}(p-1)\right\} \cdot Pr$$

$$= \left\{1 + \frac{p-1}{p} \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}}\right\} \cdot Pr$$

Ferner $$\underset{2}{R}_{es}(Pr) = \frac{l_x \cdot p^2 + l_{x+1} \cdot p - (l_x - l_{x+1})\, p - 2\,(l_{x+1} - l_{x+2})}{l_{x+2}} \cdot Pr$$

$$= \frac{l_x \cdot p^2 - l_x \cdot p + l_{x+1} \cdot p + l_{x+1} \cdot p - 2 l_{x+1} + 2 l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot Pr$$

$$= \left\{2 + \frac{l_x \cdot p\,(p-1) + 2 l_{x+1}(p-1)}{l_{x+2}}\right\} \cdot Pr$$

$$= \left\{2 + \frac{p-1}{p} \frac{\lambda_x + 2\lambda_{x+1}}{l_{x+2}}\right\} \cdot Pr, \text{ etc.}$$

und für $n < y$:

$$\underset{n}{R}_{es}(Pr) = \left\{ n + \frac{p-1}{p} \frac{\lambda_x + 2 . \lambda_{x+1} + 3 . \lambda_{x+2} + \ldots\ldots n . \lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}} \right\} . Pr \quad (119)$$

$$= \left\{ n + \frac{p-1}{p} \frac{L_x^n}{\lambda_{x+n}} \right\} . Pr,$$

welche Formel man auch unmittelbar aus Formel (118) vermittelst der Formel (30) hätte ableiten können. Eine dritte Formel zur Berechnung der Reserve nach n Jahren aus der vorjährigen Reserve findet man so: Nach $(n-1)$ Jahren bestehen noch l_{x+n-1} Versicherungen, die Reserven für dieselben betragen also $l_{x+n-1} . \underset{n-1}{R}_{es}(Pr)$, dazu kommt die neue Prämienzahlung im Betrage von $l_{x+n-1} . Pr$. Diese Summe wird ein Jahr aufgezinst, und dann ist als Rückgewähr für die im $n$ten Versicherungsjahre eintretenden Sterbefälle $n . t_{x+n} . Pr$ zu zahlen, da bei jedem Todesfall dieses Jahres die $n$fache Jahresprämie zurückgezahlt wird.

Es bleibt also nach n Jahren als Gesammtreserve

$$[l_{x+n-1} . \underset{n-1}{R}_{es}(Pr) + l_{x+n-1} . Pr]\, p - n . t_{x+n} . Pr.$$

Vertheilt man diese Summe auf die am Ende des $n$ten Versicherungsjahres noch bestehenden l_{x+n} Versicherungen, so ist

$$\underset{n}{R}_{es}(Pr) = \frac{l_{x+n-1} . p}{l_{x+n}} [\underset{n-1}{R}_{es}(Pr) + Pr] - n . \frac{t_{x+n}}{l_{x+n}} . Pr$$

$$= \frac{\lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}} [\underset{n-1}{R}_{es}(Pr) + Pr] - n . \frac{\tau_{x+n}}{\lambda_{x+n}} . Pr$$

oder

$$= \frac{\lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}} \left\{ \underset{n-1}{R}_{es}(Pr) + Pr - n . \frac{\tau_{x+n}}{\lambda_{x+n-1}} . Pr \right\}$$

$$\underset{n}{R}_{es}(Pr) = \frac{\lambda_{x+n-1}}{\lambda_{x+n}} [\underset{n-1}{R}_{es}(Pr) + (1 - n . {}^1C_{x+n-1}) . Pr] \quad (120)$$

Setzt man statt Pr die jährliche Prämie mit Rückgewähr für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall, so gelten die vorstehenden Formeln auch für diese Versicherung. Auch gelten sie für die aufgeschobene Lebensversicherung mit Rückgewähr.

§. 92. Um die Reserve für die kurze Lebensversicherung mit Rückgewähr zu finden, kann man die Formel (114) anwenden, wonach

$$\underset{n}{R}_{es}({}^yPr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} [R_x^n . {}^yPr_x - {}^nC_x];$$

denn denkt man sich die Prämie ${}^yPr_x$ in zwei Theile zerlegt, etwa in A und B, so dafs ${}^yPr_x = A + B$ ist, wo A die jährliche Prämie für die kurze Lebensversicherung wäre und B also die jährliche Prämie für eine Kapitalversicherung auf den Lebensfall ist, nur dafs die Versicherungssumme nicht 1 ist, sondern $y . {}^yPr_x$, d. h. der Rückgewähr gleich; so wäre die Reserve für den Theil A

$$\underset{n}{R}_{es}(A) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} (R_x^n . A - {}^nC_x)$$

und

$$\underset{n}{R}_{es}(B) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} . R_x^n . B$$

mithin die Summe dieser beiden Reserven

$$\underset{n}{R}_{es}(A) + \underset{n}{R}_{es}(B) = \underset{n}{R}_{es}(A+B)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}[R_x^n(A+B) - {}^nC_x], \text{ d. h.}$$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^yPr_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}[R_x^n \,.\, {}^yCr_x - {}^nC_x],$$

wie oben behauptet.

§. 93. Um die Reserve für die Versicherung einer Ueberlebensrente mit jährlicher Prämie und Rückgewähr zu finden, verfährt man am Bequemsten, wenn man die Reserve aus der Reserve des vorigen Jahres berechnet. Hat man z. B. $\underset{n-1}{R}_{es}[Pr(\underset{lx}{R}_{(u)})]$ und will daraus $\underset{n}{R}_{es}[Pr(\underset{lx}{R}_u)]$ finden, so geschieht dies auf folgende Weise. (Wir wollen zur Abkürzung die Reserve schlechtweg bezeichnen mit R_{es}). Sind ursprünglich $l_x \,.\, l_u$ solcher Versicherungen geschlossen, so bestehen davon nach $(n-1)$ Jahren noch $l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1}$ Versicherungen, und da für jede einzelne die Reserve $\underset{n-1}{R}_{es}$ beträgt, so ist die Gesammtreserve am Ende des $(n-1)$sten Jahres $l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1} \,.\, \underset{n-1}{R}_{es}$. Hierzu kommt die neue Prämienzahlung im Betrage von $l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1} \,.\, Pr$, wenn man die Prämie zur Abkürzung mit Pr bezeichnet. Multiplicirt man die so erhaltene Summe mit p, so hat man den Werth derselben am Ende des $n$ten Jahres. Hiervon geht nun ab erstens die Rückgewähr. In dem $n$ten Jahre sterben $\frac{1}{2}(l_{x+n-1} + l_{x+n})(l_{u+n-1} - l_{u+n})$ Frauen vor den Männern, sei es, dafs die letzteren am Ende des Jahres noch leben, oder in diesem Jahre aber nach ihren Frauen sterben. Für jede solche Ueberlebung wird zurückgewährt $n \,.\, Pr$, weil die jährliche Prämie $n$mal gezahlt ist; mithin beträgt die Gesammtrückgewähr des $n$ten Jahres $\frac{n}{2}(l_{x+n-1} + l_{x+n})(l_{u+n-1} - l_{u+n}) \,.\, Pr$. Aufserdem leben aber von den im $n$ten Jahre Wittwen werdenden Frauen am Ende des Jahres noch $(l_{x+n-1} - l_{x+n})\, l_{u+n}$. Jede erhält eine sofort beginnende Leibrente, deren Werth also $R_{(u+n)}$ ist. Für alle Wittwen beträgt somit die Leistung $(l_{x+n-1} - l_{x+n})\, l_{u+n} \,.\, R_{(u+n)}$. Und es bleibt als Gesammtreserve am Ende des $n$ten Jahres

$$(l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1}\, \underset{n-1}{R}_{es} + l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1}\, Pr)\,p - \frac{n}{2}(l_{x+n-1} + l_{x+n})(l_{u+n-1} - l_{u+n})\,Pr$$
$$- (l_{x+n-1} - l_{x+n})\, l_{u+n}\, R_{(u+n)}$$

Vertheilt man diesen Rest auf die am Ende des $n$ten Jahres noch bestehenden $l_{x+n} \,.\, l_{x+n}$ Versicherungen, so ist

$$\underset{n}{R}_{es} = \frac{l_{x+n-1} \,.\, l_{u+n-1}}{l_{x+n} \,.\, l_{u+n}}\, p\,[\underset{n-1}{R}_{es} + Pr] - \frac{n}{2}\,\frac{l_{x+n-1} + l_{x+n}}{l_{x+n}} \,.\, \frac{l_{u+n-1} - l_{u+n}}{l_{u+n}}\, Pr$$
$$- \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_{x+n}}\, R_{(u+n)}$$

$$= \frac{l_{x+n-1} \,.\, \lambda_{u+n+1}}{l_{x+n} \,.\, \lambda_{u+n}}\, [\underset{n-1}{R}_{es} + Pr] - \frac{n}{2}\,\frac{l_{x+n-1} + l_{x+n}}{l_{x+n}} \,.\, \frac{l_{u+n-1} - l_{u+n}}{l_{u+n}}\, Pr$$
$$- \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_{x+n}}\, R_{(u+n)}$$

Anmerkung. Dieselbe Formel kann man auch für die Reserve der Ueberlebensversicherung mit Rückgewähr gebrauchen, nur heifst dann das letzte Glied $-\frac{1}{2}\frac{l_{x+n-1}-l_{x+n}}{l_{x+n}}\cdot\frac{l_{u+n-1}+l_{u+n}}{l_{u+n}}$, weil in dem n Jahre $\frac{1}{2}(l_{x+n-1}-l_{x+n})(l_{u+n-1}+l_{u+n})$ Frauen ihre Männer überleben und für jeden solchen Fall die Versicherungssumme 1 gezahlt wird.

C. Nachträgliche Bemerkungen.

§. 94. In dem Vorhergehenden ist die Reserve nur für das Ende der Versicherungsjahre bestimmt. Will man aber die Reserve nach $\left(n+\frac{p}{q}\right)$ Jahren bestimmen, wo n eine ganze Zahl und $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch ist, so müfste man, nachdem man zu $\underset{n}{R}_{es}$ die neue Prämienzahlung zugeschlagen und diese Summe dann um $\frac{p}{q}$ Jahre aufgezinst davon den $\frac{p}{q}$ ten Theil der Bankleistungen des $(n+1)$ Jahres abziehen, d. h. gehörig vertheilt auf die einzelne Versicherung. Im Allgemeinen macht man es sich aber bequemer, berechnet $\underset{n}{R}_{es}$, $\underset{n+1}{R}_{es}$, und multiplicirt die Differenz mit $\frac{p}{q}$ und addirt oder subtrahirt dies Product zu $\underset{n}{R}_{es}$, je nachdem $\underset{n+1}{R}_{es}$ gröfser oder kleiner ist als $\underset{n}{R}_{es}$. Unter Umständen kann es bequemer sein, die Differenz der beiden Reserven mit $1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$ zu multipliciren. Dafür mufs man dann aber das Product von $\underset{n+1}{R}_{es}$ subtrahiren oder zu $\underset{n+1}{R}_{es}$ addiren, je nachdem $\underset{n+1}{R}_{es}$ gröfser oder kleiner ist als $\underset{n}{R}_{es}$.

Berechnet man auf diese annäherungsweise richtige Art die Reserve für einen Theil des Jahres, so mufs man noch die sogenannten Prämien-Ueberträge berechnen und zur Reserve hinzufügen. Diese Prämien-Ueberträge (oder wie man auch zu sagen pflegt, die noch nicht verdiente Prämie) findet man, indem man die Prämie auf die Zeit von der letzten bis zur nächsten Prämienzahlung gleichmäfsig vertheilt und nun denjenigen Theil der Prämie berechnet, der auf den noch nicht verflossenen Theil des Zeitraums zwischen den beiden Prämienzahlungen fällt. — Bei Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung sind Prämien-Ueberträge natürlich nicht zu reserviren.

§. 95. Die bei Weitem überwiegende Mehrzahl der Versicherungen sind Kapitalversicherungen auf Lebenszeit mit jährlicher Prämienzahlung (d. h. gewöhnlich hört die Prämienzahlung bei einer Lebensversicherung auf Lebenszeit mit dem 90sten, oder auch mit dem 85sten Lebensjahre auf). Anstatt nun für jede einzelne Versicherung die Reserve zu berechnen, stellt man die Versicherungen in verschiedene Gruppen zusammen und zwar so, dafs die Versicherungen derselben Gruppe gleichaltrigen Versicherten angehören. Am Ende des Jahres hat man dann einfach die Reserve für die ganze Gruppe zu bestimmen. Die Versicherungen einer Gruppe rühren aber nicht im-

mer aus demselben Versicherungsjahre her, da die Gruppe auf folgende Weise gebildet wird. Nehmen wir z. B. eine bestimmte Gruppe. Im ersten Jahre werden alle Versicherungen für 35jährige Versicherte zusammengestellt; im nächsten Jahre kommen hierzu die Versicherungen von 36jährigen Versicherten, im dritten Jahre fügt man diejenigen Versicherungen hinzu, für welche die Versicherten beim Abschlufs der Versicherung 37 Jahre alt sind etc.

Will man nun z. B. am Ende des dritten Jahres die Reserve berechnen, und hat man aus dem ersten Jahre eine Versicherung mit der Versicherungssumme A, aus dem zweiten Jahre eine Versicherung mit der Summe B, und aus dem dritten Jahre eine Versicherung mit der Summe C, so ist die Reserve für diese drei Versicherungen

$$\begin{aligned} &(C_{38} - P_{35} \,.\, R_{38})\, A \\ &+ (C_{38} - P_{36} \,.\, R_{38})\, B \\ &+ (C_{38} - P_{37} \,.\, R_{38})\, C \\ = (A + B + C)\, C_{38} - (A \,.\, P_{35} + B \,.\, P_{36} + C \,.\, P_{37}) \,.\, R_{38}. \end{aligned}$$

Was hier von drei Versicherungen gesagt ist, gilt auch, wenn aus jedem einzelnen Jahre mehrere Versicherungen herrühren und man findet die Gesammtreserve für alle derselben Gruppe angehörigen Versicherungen am Ende eines bestimmten Jahres, wenn man für die ganze Versicherungssumme dieser Gruppe die einmalige Prämie berechnet für das Alter, welches die Versicherten am Ende dieses Jahres haben, und zieht davon ab das Product aus dem Werth der (mit dem Tode resp. mit dem 90sten oder 85sten Lebensjahre aufhörenden) Rente für dieses Alter und der Gesammtprämie für alle Versicherungen dieser Gruppe.

In dieser einfachen Weise würde man die richtige Reserve finden, wenn alle Versicherungen am Anfang der Jahre abgeschlossen würden. Dies ist aber nicht der Fall. Hier hilft man sich auf folgende Art. Man berechnet die Reserven so, als ob alle Versicherungen am Anfang des Jahres geschlossen wären. Hierdurch wird natürlich die Reserve zu grofs. Dafür berechnet man noch aufserdem die sogenannte „abgehende Reserve". Besteht nämlich eine Versicherung am Ende des ersten Jahres erst $7\frac{1}{2}$ Monate, so berechnet man als abgehende Reserve die Reserve für $4\frac{1}{2}$ Monate, d. h. $\frac{4\frac{1}{2}}{12} = \frac{3}{8}$ der Reserve am Ende des ersten Jahres und zieht diese von der ganzen Jahresreserve ab. Am Ende des zweiten Jahres besteht die Versicherung 1 Jahr und $7\frac{1}{2}$ Monat, aber man berechnet die Reserve so, als ob die Versicherung 2 Jahre bestände, und zieht dieselbe abgehende Reserve wie oben ab. Für eine ganze Gruppe von Versicherungen zieht man die Summe der abgehenden Reserven von der Gesammtreserve ab. Dabei hat man die abgehenden Reserven nur für die aus dem letzten Jahre herrührenden Versicherungen neu zu berechnen, da man die abgehenden Reserven für die älteren Versicherungen schon hat.

Dafs dies Verfahren, die Reserve zu berechnen, nur annähernd richtig ist, braucht nicht erst erwähnt zu werden; aber die Resultate haben auch wiederum denjenigen Grad von Genauigkeit, der hier erforderlich ist.

Anmerkung. Es giebt noch andere Methoden, die Reserven für die einzelnen Gruppen von Versicherungen zu berechnen. Man kann z. B. für das erste Jahr eine Theilreserve berechnen, entsprechend der Zeit dieses Jahres, während welcher die Versicherung in Kraft war, und beginnt dann mit dem zweiten Jahre die Berechnung nach vollen Jahren. Besteht z. B. eine Versicherung $2\frac{1}{4}$ Jahr, so wird erstens die „Reserve nach 2 Jahren" berechnet und dazu kommt die Reserve nach „$\frac{1}{4}$ Jahr". Hier bildet die „hinzukommende" Reserve einen constant bleibenden Addenden, während oben die abgehende Reserve ein constant bleibender Subtrahendus ist.

§. 96. Die Kapitalversicherungen auf den Todesfall mit abgekürzter Prämienzahlung kann man ebenso behandeln, als ob die Prämienzahlung bis ans Lebensende fortgesetzt würde, d. h. man rangirt die einzelnen Versicherungen in diejenigen Gruppen ein, wohin sie nach dem Alter der Versicherten gehören. Man mufs dann aber für den Mehrbetrag der Prämie eine besondere Reserve berechnen. So ist z. B.

$$P_x = \frac{C_x}{R_x}$$

dagegen

$$P_x^y = \frac{C_x}{R_x^y}$$

mithin ist, wenn man den Mehrbetrag der Prämie mit M_x^y bezeichnet,

$$M_x^y = P_x^y - P_x = \left(\frac{1}{R^y} - \frac{1}{R_x}\right) . C_x.$$

Ferner ist

$$\underset{n}{R}{}_{es}(P_x) = C_{x+n} - P_x . R_{x+n}$$

und

$$\underset{n}{R}{}_{es}(P_x^y) = C_{x+n} - P_x^y . R_{x+n}^{y-n}$$

Die Differenz beider mufs die Reserve für den Mehrbetrag sein, und somit ist

$$\begin{aligned}\underset{n}{R}{}_{es}(M_x^y) &= C_{x+n} - P_x^y . R_{x+n}^{y-n} - C_{x+n} + P_x . R_{x+n} \\ &= P_x . R_{x+n} - P_x^y . R_{x+n}^{y-n} \\ &= \frac{C_x}{R_x} . R_{x+n} - \frac{C_x}{R_x^y} . R_{x+n}^{y-n} \\ &= C_x . \left(\frac{R_{x+n}}{R_x} - \frac{R_{x+n}^{y-n}}{R_x^y}\right)\end{aligned}$$

Geht man auf die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden zurück, so wird

$$\underset{n}{R}{}_{es}(M_x^y) = C_x . \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left(\frac{\Sigma\lambda_{x+n}}{\Sigma\lambda_x} - \frac{\Sigma\lambda_{x+n} - \Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}\right)$$

Fügt man innerhalb der Klammer hinzu

$$-1 + 1 = -\frac{\Sigma\lambda_x}{\Sigma\lambda_x} + \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}$$

so wird

$$\begin{aligned}\underset{n}{R}{}_{es}(M_x^y) &= C_x . \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left(\frac{\Sigma\lambda_{x+n} - \Sigma\lambda_x}{\Sigma\lambda_x} + \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y} - \Sigma\lambda_{x+n} + \Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}\right) \\ &= C_x . \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}}\left(\frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}} - \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+n}}{\Sigma\lambda_x}\right)\end{aligned}$$

Dividirt man innerhalb der Klammer beide Glieder in Zähler und Nenner mit λ_x, so wird

$$\underset{n}{R}_{es}(M_x^y) = C_x \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} \left(\frac{R_x^n}{R_x^y} - \frac{R_x^n}{R_x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} \cdot R_x^n \cdot C\left(\frac{1}{R_x^y} - \frac{1}{R_x}\right), \text{ d. h.}$$

$$\underset{n}{R}_{es}(M_x^y) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+n}} R_x^n \cdot M_x^y \tag{121}$$

Die vorstehende Formel hätte man nach Formel (115) ohne Weiteres bilden können, indem man den Mehrbetrag M_x^y für die Prämie einer Versicherung auf den Lebensfall ansieht. — Die Reserve aus dem Mehrbetrage ist derartig, daſs sie die Reserve aus der Prämie für die einfache Lebensversicherung nach y Jahren zu C_{x+y} ergänzen muſs, da alsdann die Prämienzahlung aufhört und somit die einmalige Prämie als Reserve vorhanden sein muſs. Es muſs somit sein

$$\underset{y}{R}_{es}(M_x^y) + \underset{y}{R}_{es}(P_x) = C_{x+y}$$

Nun ist
$$\underset{y}{R}_{es}(P_x) = C_{x+y} - P_x \cdot R_{x+y}$$

und
$$\underset{y}{R}_{es}(M_x^y) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot R_x^y \cdot M_x$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot R_x^y \cdot C_x \left(\frac{1}{R_x^y} - \frac{1}{R^x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot C_x \left(1 - \frac{R_x^y}{R_x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot C_x \left(1 - \frac{\Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+y}} \cdot C_x \left(1 - 1 + \frac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\Sigma\lambda_x}\right)$$

$$= C_x \cdot \frac{\dfrac{\Sigma\lambda_{x+y}}{\lambda_{x+y}}}{\dfrac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x}} = C_x \cdot \frac{R_{x+y}}{R_x} = P_x \cdot R_{x+y}$$

Mithin ist
$$\underset{y}{R}_{es}(P_x) + \underset{y}{R}_{es}(M_x^y) = C_{x+y},$$
wie es erforderlich war.

§. 97. Nach den oben aufgestellten Sätzen ist bei der kurzen Lebensversicherung für $n < y$

$$\underset{n}{R}_{es}({}^yP_x) = {}^{y-n}C_{x+n} - {}^yP_x \cdot R_{x+n}^{y-n}$$

Da hier die Reserve sehr gering ist, so kann man sie annäherungsweise so berechnen:

Wir haben gesehen, daſs

$$\underset{1}{R}_{es}({}^yP_x) = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} \left({}^yP_x - \frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x}\right)$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} ({}^yP_x - {}^1C_x)$$

Setzt man, was annähernd richtig ist, $\frac{\lambda_x}{\lambda_{x+1}} = 1$, so ist

$$\underset{1}{R_{es}}({}^yP_x) = {}^yP_x - {}^1C_x$$

Ferner ist

$$\underset{2}{R_{es}}({}^yP_x) = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}}\,{}^yP_x - \frac{\tau_{x+1} + \tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}}$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_{x+2}}\left({}^yP_x - \frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x}\right) + \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}}\left({}^yP_x - \frac{\tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}}\right)$$

Setzt man hier sowohl $\frac{\lambda_x}{\lambda_{x+2}}$ als auch $\frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_{x+2}} = 1$, so ist

$$\underset{2}{R_{es}}({}^yP_x) = {}^yP_x - {}^1C_x + {}^yP_x - {}^1C_{x+1}$$

$$= 2\,.\,{}^yP_x - ({}^1C_x + {}^1C_{x+1})$$

Ebenso findet man

$$\underset{3}{R_{es}}({}^yP_x) = 3\,.\,{}^yP_x - ({}^1C_x + {}^1C_{x+1} + {}^1C_{x+2})$$

und für $n < y$

$$\underset{n}{R_{es}}({}^yP_x) = n\,.\,{}^yC_x - ({}^1C_x + {}^1C_{x+1} + {}^1C_{x+2} + \ldots\ldots {}^1C_{x+n-1}) \tag{122}$$

Hierfür kann man aber auch setzen

$$\underset{n}{R_{es}}({}^yP_x) = {}^1C_{x+n} + {}^1C_{x+n+1} + \ldots\ldots {}^1C_{x+y-1} - (y-n)\,{}^yP_x, \tag{122a}$$

denn während der $(y-n)$ Jahre, während welcher die Versicherung noch besteht, hat die Versicherungsbank zu bezahlen die Sterbefälle der einzelnen Jahre und dazu genügt, wenn man die Zahlungen auf die einzelnen Versicherungen vertheilt,

$$ {}^1C_{x+n} + {}^1C_{x+n+1} + \ldots\ldots {}^1C_{x+y-1}.$$

Die Versicherungsbank erhält aber noch $(y-n)$ Jahresprämien; zieht man also $(y-n)\,{}^yP_x$ von der vorigen Summe ab, so hat man die Reserve.

Anhang II.

Die Kinderversorgungs-Kassen.

Die Kinderversorgungen, wie sie bei den sogenannten „Kinderversorgungs-Kassen“ erworben werden können, unterscheiden sich dadurch von den Lebens- und Rentenversicherungen, dafs hier nicht im Voraus die zur Auszahlung kommende Summe festgesetzt wird. Alle Kinder nämlich, die der Kinderversorgungs-Kasse beitreten und in demselben Jahre geboren sind, bekommen für sich eine besondere Kasse, alle Einzahlungen werden Zins auf Zins verzinst, und bei einem bestimmten Alter der Kinder wird die Kasse ausgeschüttet, und die Kinder, die von den beigetretenen noch leben, erhalten das Vermögen der Kasse zu gleichen Theilen. Bei der Berechnung der Prämien kommt es also darauf an, dafs alle Kinder, die derselben Kasse angehören,

mögen sie früher oder später beigetreten sein, durch ihre Zahlungen dasselbe Anrecht an das Vermögen der Kasse haben.

Nehmen wir an, daſs die letzte Prämienzahlung, wenn dieselbe jährlich ist, geleistet wird, wenn die Kinder $(y-1)$ Jahre alt sind, während das Vermögen der Kasse zur Vertheilung kommt, wenn die Kinder y Jahre alt sind. Bei jährlicher Prämienzahlung haben dann die im Alter von 0 Jahren beigetretenen Kinder y Jahresprämien zu entrichten. Nehmen wir an, daſs l_0 Kinder im Alter von 0 Jahren mit jährlicher Prämienzahlung bei der Kasse sich betheiligen, und bezeichnen wir die Prämie mit P_0, so beträgt die erste Einzahlung $l_0 . P_0$ und der Werth dieser Einzahlung ist bei der Ausschüttung der Kasse $l_0 . P_0 . p^y$. Von den l_0 Kindern leben nach einem Jahre noch l_1, die neue Einzahlung beträgt somit $l_1 . P_0$ und der Werth derselben ist bei der Ausschüttung $l_1 . P_0 . p^{y-1}$, der Werth der dritten Einzahlung ist $l_2 . P_0 . p^{y-n}$ etc. Mithin betragen sämmtliche Einzahlungen

$$[l_0 p^y + l_1 . p^{y-1} + l_2 . p^{y-2} + \ldots\ldots l_{y-1} . p]\, P_0,$$

welche Summe sich auch auf die Form bringen läſst

$$\left(l_0 + \frac{l_1}{p} + \frac{l_2}{p^2} + \ldots\ldots \frac{l_{y-1}}{p^{y-1}}\right) . p^y . P_0$$
$$= (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots \lambda_{y-1}) . p^y . P_0$$
$$= (\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y) . p^y . P_0$$

Von den ursprünglich beigetretenen Kindern leben bei der Ausschüttung der Kasse noch l_y, mithin beträgt der Antheil des einzelnen Kindes

$$\frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{l_y} . p^y . P_0$$
$$= \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_y} . P_0$$

Treten am Anfang des zweiten Jahres l_1 einjährige Kinder derselben Kasse bei und beträgt für dieselben die jährliche Prämie P_1, so ist der Werth sämmtlicher Einzahlungen bei der Ausschüttung der Kasse, der hier $(y-1)$ Jahre nach der ersten Prämienzahlung erfolgt,

$$(l_1 . p^{y-1} + l_2 . p^{y-2} + \ldots\ldots l_{y-1} . p)\, P_1$$
$$= \left(\frac{l_1}{p} + \frac{l_2}{p^2} + \ldots\ldots \frac{l_{y-1}}{p^{y-1}}\right) p^y . P_1$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots \lambda_{y-1})\, p^y . P_1 = (\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y)\, p^y . P_1$$

Von l_1 einjährigen Kindern leben nach $y-1$ Jahren noch l_y Kinder, jedes einzelne hat also Anrecht auf den $l_y$ten Theil von $(\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y)\, p_y . P_1$ und dieser Theil beträgt

$$\frac{\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y}{l_y} . p^y . P_1 = \frac{\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_y} . P_1$$

Soll nun das Anrecht an die Kasse für die beim Beitritt 0jährigen und für die beim Beitritt einjährigen Kinder gleich sein, so muſs

$$\frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_y} . P_0 = \frac{\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_y} . P_1, \text{ d. h.}$$

wenn wir P_0 beliebig annehmen, mufs

$$P_1 = \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\Sigma\lambda_1 - \Sigma\lambda_y} . P_0$$

sein. Ebenso findet man

$$P_2 = \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\Sigma\lambda_2 - \Sigma\lambda_y} . P_0$$

und allgemein für $n < y$

$$P_n = \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\Sigma\lambda_n - \Sigma\lambda_y} . P_0 \tag{123}$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda_n} . \frac{R_0^y}{R_n^{y-n}} . P_0 \tag{123 a}$$

Bei einmaliger Zahlung (dieselbe möge bezeichnet sein durch C) zahlen l_0 0jährige Kinder $l_0 . C_0$, welche Summe nach y Jahren den Werth hat $l_0 . C_0 . p^y$. Der Antheil jedes der l_y dann noch lebenden Kinder ist also

$$\frac{l_0 . C_0 . p^y}{l_y} = \frac{\lambda_0}{\lambda_y} . C_0,$$

soll dieser Antheil dem Antheil bei jährlicher Prämienzahlung gleich sein, so ist

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_y} . C_0 = \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_y} . P_0$$

also

$$C_0 = \frac{\Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_y}{\lambda_0} . P_0 \tag{124}$$

oder

$$C_0 = R_0^y . P_0 \tag{124 a}$$

Ebenso findet man

$$C_1 = R_1^{y-1} . P_1$$

$$C_n = R_n^{y-n} . P_n \tag{125}$$

oder will man C_1, C_n etc. durch C_0 und P_0 ausdrücken, so ist, weil

$$P_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} . \frac{R_0^y}{R_n^{y-n}} . P_0$$

$$C_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} . \frac{R_0^y}{R_n^{y-n}} . R_n^{y-n} P_0$$

$$C_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} . R_0^y . P_0 \tag{126}$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda_n} . C_0 \tag{127}$$

Für erhöhte Prämien gewähren die Kinderversorgungs-Kassen den Angehörigen der gestorbenen Kinder die eingezahlten Prämien aber ohne Zinsen bei der Ausschüttung der Kasse zurück. Hier mufs, nachdem die Rückgewähr geleistet, für jedes Kind derselbe Antheil bleiben. Bezeichnen wir mit Cr und Pr die einmalige und jährliche Prämie mit Rückgewähr, so beträgt die Einzahlung, welche l_0 0jährige Kinder geleistet, bei einmaliger Zahlung nach y Jahren $l_0 . Cr_0 . p^y$. Von dieser Summe wird zurückgewährt, weil $(l_0 - l_y)$ Kinder gestorben sind, $(l_0 - l_y)\, Cr_0$. Vertheilt man den Rest an die noch lebenden Kinder, so ist der Antheil des einzelnen

$$\frac{l_0 . p^y - (l_0 - l_y)}{l_y} . Cr_0$$

und dieser Antheil mufs wieder $=\frac{\lambda_0}{\lambda_y}\,.\,C_0$ sein, und folglich ist

$$Cr_0=\frac{\lambda_0\,C_0\,l_y}{\lambda_y\,[l_0\,p^y-(l-l_y)]}$$
$$=\frac{l_0\,.\,p_y\,.\,C_0}{l_0\,.\,p^y-(l_0-l_y)}=\frac{C_0}{1-\frac{l_0-l_y}{l_0\,.\,p^y}}=\frac{C_0}{1-\frac{l_0-l_y}{\lambda_0\,.\,p^y}}$$

Für l_1 einjährige Kinder beträgt der Antheil an der Kasse nach $(y-1)$ Jahren $l_1\,.\,p^{y-1}\,.\,Cr_1$. Hiervon geht ab die Rückgewähr im Betrage von $(l_1-l_y)\,Cr_1$ und es bleibt als Antheil des einzelnen

$$\frac{l_1\,.\,p^{y-1}-(l_1-l_y)}{l_y}\,.\,Cr_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_y}\,.\,C_1$$
$$=\frac{l_1}{l_y}\,.\,p^{y-1}\,.\,C_1$$

mithin

$$Cr_1=\frac{l_1\,.\,p^{y-1}\,.\,C_1}{l_1\,.\,p^{y-1}-(l_1-l_y)}$$
$$=\frac{C_1}{1-\frac{l_1-l_y}{l_1\,.\,p^{y-1}}}=\frac{C_1}{1-\frac{l_1-l_y}{\lambda_1\,.\,p_y}}$$

ebenso findet man

$$Cr_n=\frac{C_n}{1-\frac{l_n-l_y}{l_n\,.\,p^{y-n}}}=\frac{C_n}{1-\frac{l_n-l_y}{\lambda_n\,.\,p^y}} \tag{128}$$

Bei jährlicher Prämienzahlung beträgt für l_0 0jährige Kinder die Einzahlung

$$(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y\,.\,Pr_0,$$

hiervon geht ab als Rückgewähr

$$t_1\,.\,Pr_0+2\,t_2\,.\,Pr_0+3\,t_3\,.\,Pr_0+\ldots\ldots y\,.\,t_y\,.\,Pr_0$$
$$=[(l_0-l_1)+2\,(l_1-l_2)+3\,(l_2-l_3)+\ldots\ldots y\,(l_{y-1}-l_y)]\,Pr_0$$
$$=(l_0+l_1+l_2+\ldots\ldots l_{y-1}-y\,l_y)\,Pr_0$$
$$=(\Sigma l_0-\Sigma l_y-y\,l_y)\,Pr_0$$

und somit bleibt

$$[(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y-(\Sigma l_0-\Sigma l_y-y\,l_y)]\,Pr_0$$

dividirt man dies durch l_y, so mufs

$$\frac{(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y-(\Sigma l_0-\Sigma l_y-y\,l_y)}{l_y}\,.\,Pr_0=\frac{\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y}{l_y}\,.\,p^y\,.\,P_0$$

und somit

$$Pr_0=\frac{(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y\,.\,P_0}{(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y-(\Sigma l_0-\Sigma l_y-y\,l_y)}$$
$$=\frac{P_0}{1-\frac{\Sigma l_0-\Sigma l_y-y\,l_y}{(\Sigma\lambda_0-\Sigma\lambda_y)\,p^y}}$$

Ebenso findet man

$$Pr_1 = \frac{P_1}{1 - \frac{\Sigma l_1 - \Sigma l_y - (y-1)\, l_y}{(\Sigma \lambda_1 - \Sigma \lambda_y)\, p^y}}$$

und

$$Pr_n = \frac{P_n}{1 - \frac{\Sigma l_n - \Sigma l_y - (y-n)\, l_y}{(\Sigma \lambda_n - \Sigma \lambda_y)\, p^y}} \tag{129}$$

Anmerkung 1. Es mufs offenbar $C_{y-1} = P_{y-1}$ und $Cr_{y-1} = Pr_{y-1}$ sein. Nach den obigen Formeln ist

$$C_{y-1} = R^1_{y-1} \cdot P_{y-1} = \frac{\Sigma \lambda_{y-1} - \Sigma \lambda_y}{\lambda_{y-1}} \cdot P_{y-1} = \frac{\lambda_{y-1}}{\lambda_{y-1}} \cdot P_{y-1} = P_{y-1}$$

Ferner

$$Cr_{y-1} = \frac{C_{y-1}}{1 - \frac{l_{y-1} - l_y}{\lambda_{y-1} \cdot p^y}} \quad \text{und}$$

$$Pr_{y-1} = \frac{P_{y-1}}{1 - \frac{\Sigma l_{y-1} - \Sigma l_y - (y - y + 1)\, l_y}{(\Sigma \lambda_{y-1} - \Sigma \lambda_y)\, p^y}}$$

$$= \frac{P_{y-1}}{1 - \frac{l_{y-1} - l_y}{\lambda_{y-1} \cdot p^y}}$$

Da $C_{y-1} = P_{y-1}$, wie schon gezeigt, so ist auch

$$Cr_{(y-1)} = Pr_{y-1}.$$

Anmerkung. Die Reserven bei den Kinderversorgungs-Kassen werden durch einfache Aufzinsung der Reserven des vorigen Jahres und durch Zuzählung der neuen Beiträge gefunden.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Grünstrafse 18.

Druckfehler.

Seite 22 Zeile 6 lies im 3ten Gliede des Zählers: $p^2 . \frac{1+p}{2}$ statt [illegible]

„ 31 „ 17 „ cinmaligen statt jährlichen

„ 32 „ 4 „ ${}^{y}Cr_x$ statt ${}_{y}Cr_x$

„ 36 „ 11 „ Zinst statt Zieht

„ 37 „ 20 „ dividirt statt addirt

„ 41 „ 8 „ $l_{x+2} \cdot l_{u+2}$ statt $l_{x+2} \cdot l_{x+2}$

„ 43 Formel (65 a) lies z statt y (2mal)

„ 46 Zeile 26 lies $\underset{tx}{R} r_{(u)}$ statt $\underset{tx}{R} r_{(x)}$

„ 63 „ 5 „ Ausdrücke statt Summe

„ 79 „ 14 „ $R_{t\,x+2\,(u+2)}$ statt $R_{t\,x+2\,(x+2)}$

„ „ „ 22 „ $\Sigma(l_x \lambda_u)$ statt $\Sigma(l_x l_u)$

„ 82 Formel (106) lies im Nenner der rechten Seite: λ_{x+n}

„ 83 Zeile 2 lies im Nenner: x statt u

„ 87 „ 6 „ $\underset{tx}{R} r_{(u)}$ statt $\underset{tx}{R}_{(u)}$ und $R_{(u+1)}$ statt $R_{(x+1)}$

„ 89 „ 6 „ $(\lambda_{u+2} + \Sigma \lambda_{u+3})$ statt $(\lambda_{u+2}) \Sigma \lambda_{u+3}$

„ 96 „ 9 „ $\Sigma(l_{x+n} . \lambda_{u+n})$ statt $\Sigma(l_{x+n,\, u+n})$

„ 108 „ 4 „ $\frac{\tau_{x+2}}{\lambda_{x+1}}$ statt $\frac{\tau_{x+2}}{\lambda_{x+2}}$

„ „ „ 11 „ $n . {}^{y}P_x$ statt $n . {}^{y}C_x$

„ 109 „ 13 „ p^{y-2} statt p^{y-n}